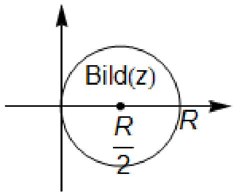
Besprechung zu Blatt 11 zu Analysis 3

Aufgabe 5



$z(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R}+i\omega C} = y - i \pm \sqrt{(\frac{R}{2})^2 - (y-\frac{R}{2})^2}$
wobei $y = \frac{R}{1+\omega^2C^2R^2}$
$\omega \in \mathbb{R} \Rightarrow y \in (0,R]\ z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Aufgabe 1

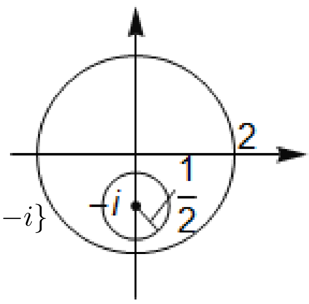
$\gamma : I \to \mathbb{C}$
$|\int\limits_\gamma f(z)dz| = |\int\limits_I f(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt| \leq \int\limits_I |f(\gamma(t))||\dot\gamma(t)|dt$
$\leq ||f|_{Bild\ \gamma}||_\infty \cdot \underbrace{\int\limits_I |\dot\gamma(t)|dt}_{Bogenlänge\ von\ \gamma}$

Aufgabe 4

Sei G offen und zusammenhängend,
$f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(G) \subset \mathbb{R}$
z.Z. f konstant.
Sei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+iy \in G\}$
$g : U \to \mathbb{R}^2, g(x,y) = \begin{pmatrix} \Re(f(x+iy)) \\ \Im(f(x+iy)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix}$
Da f. holomorph, ist g diffbar mit $\partial_x g_1 = \partial_y g_2,\ \partial_x g_2 = -\partial_y g_1$
Da $f(G) \subset \mathbb{R}$ gilt $g_2 = 0$, dh, $g_2 = 0$,
d.h. $\partial_y g_1 = \partial_y g_2 = 0 \Rightarrow \partial_y g_1 = -\partial_x g_2 = 0$
Damit ist g lokal konstant.
Mit Aufgabe 3c folgt, dass g und damit f konstant ist.

Aufgabe 2

$\oint\limits_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z^2+1}dz = ?,\quad z^2+1 = (z+1)(z-i)$
$f : \mathbb{C}\setminus\{\pm i\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{1}{z^2+1}$
$\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z+i$ holomorph
$\Rightarrow \mathbb{C}\setminus\{i\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z+i}$ holomorph
$\Rightarrow \mathbb{C}\setminus\{-i\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z-i}$ holomorph
$z \mapsto f(z) = \frac{1}{z+i}\frac{1}{z-i}$ holomorph
Es gilt für $z \in \mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$: $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2i}\frac{1}{z-i} + (-\frac{1}{2i})\frac{1}{z+i}$
$\Rightarrow \oint\limits_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z^2+1}dz = \frac{1}{2i}\oint\limits_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z-i}dz - \frac{1}{2i}\oint\limits_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z+i}dz$



$\oint\limits_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z+i}dz = \int\limits_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{z+i}dz = \int\limits_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{2e^{it}+i}dt$ hässlich.
$\overline{B(-i,\frac{1}{2})} \subseteq B(0,2)$
Aufgabe 6 liefert, dass $\gamma_{0,2}$ homotop zu $\gamma_{-i\frac{1}{2}}$ in $\overline{B(0,2)}\setminus\{-i\} \subseteq \mathbb{C}\setminus\{-i\}$
$\mathbb{C}\setminus\{-i\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z+i}$ holomorph
mit 1.13 $\Rightarrow \int\limits_{\gamma_{0,2}} \frac{1}{z+i}dz = \int\limits_{\gamma_{-i,\frac{1}{2}}} \frac{1}{z+i}dz = \int\limits_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{(-i+\frac{1}{2}e^{it})+i} \cdot i\frac{1}{2}e^{it}}_{=i} dt = 2\pi i$

Genauso sieht man $\oint\limits_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z-i} dz = \int\limits_{\gamma_{i,\frac{1}{2}}} \frac{1}{z-i} dz$

$\Rightarrow \oint\limits_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z^2+1} dz = 0$

Sei $r > 2$ wie vorher sieht man mit Aufgabe 6 und Satz 1.13:
$0 = \oint\limits_{\partial B(0,r)} \frac{1}{z^2+1} dz = \oint\limits_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z^2+1} dz$

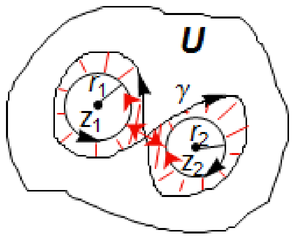
oder:
Mit Aufgabe 1 gilt für $r > 2$:
$|\oint\limits_{\partial B(0,2)} \frac{1}{z^2+1} dz| = |\int\limits_{\gamma_{0,r}} \frac{1}{z^2+1} dz| \leq \underbrace{\max_{t\in[0,2\pi]} |f(\gamma_{0,r}(t))|}_{(*)} \cdot \underbrace{\textit{Bogenlänge von } \gamma_{0,r}}_{2\pi r}$

$zu(*) : |f(\gamma_{0,r}(t))| = |\frac{1}{\gamma_{0,r}(t)^2+1}| \leq \frac{1}{|\gamma_{0,r}(t)^2|-1} = \frac{1}{r^2-1}$
$\Rightarrow ... \leq \frac{1}{r^2-1} 2\pi r = \frac{2\pi}{r-\frac{1}{r}} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$
Mit Aufgabe 6 gilt:
$\oint\limits_{\partial B(0,2)} \frac{1}{1+z^2} dz = \oint\limits_{\partial B(0,r)} \frac{1}{z^2+1} dz = \lim\limits_{\tilde{r}\to\infty} \oint\limits_{\partial B(0,\tilde{r})} \frac{1}{1+z^2} dz = 0$

Allgemeines

Homotopien

$\gamma : I \to \mathbb{C},\ f : U \to \mathbb{C}$ holomorph
$\int\limits_\gamma f(z)dz =? = \int\limits_I f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt$
U Sternförmig
$\gamma_1, \gamma_2 : I = [a, b] \to \mathbb{C}$ geschlossen (d.h. $\gamma_1(a) = \gamma_1(b),\ \gamma_2(a) = \gamma_2(b)$)
$\Rightarrow \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = 0 \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz$
Potenzreihenentwicklung (Satz 1.3, 1.7)
$B(z_0, \varepsilon)$
$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$
$\int f(z)dz = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \int\limits_\gamma (z - z_0)^n dz = 0$
$(z - z_0)^n$ hat Stammfunktion $\frac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$



$\int\limits_\gamma f =? = \int\limits_{\gamma_1} f + \int\limits_{\gamma_2} f$
$\gamma_1 = \gamma_{z_1,r_1},\ \gamma_2 = \gamma_{z_2,r_2}$ (Aufgabe 6)
$\gamma_2(t) = \gamma_{z_2,r_2}(-t) = z_2 + r_2 e^{-it}$
$\int\limits_\gamma f = (\int\limits_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_2} + \int\limits_{\gamma_r}) f(z)dz = (\int\limits_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_2}) f(z)dz$

Laurentreihen

$z_0,\ f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$
$f(z) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$
$\int\limits_\gamma f(z)dz = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n \int\limits_\gamma (z - z_0)^n dz$
(hat Stammfunktion $\frac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1}\ \ \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

$$= a_{-1} \underbrace{\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz}_{=2\pi i \cdot N(\gamma)} = 2\pi i a_{-1} \cdot N(\gamma)$$

$N(\gamma)$ =Umlaufzahl von γ zu z_0
$a_{-1} = res(f, z_0)$ Residuum