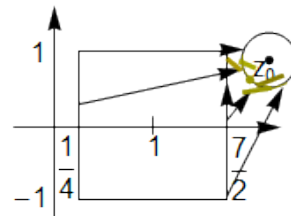


Beispiele zur 2. Klausur in Analysis 3

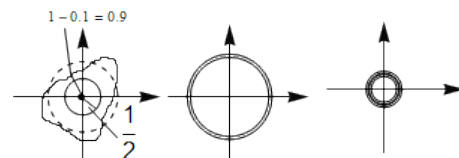
Beispiel 1

$$\begin{aligned} \gamma &: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, \quad z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{Bild}\gamma \\ r &: [a, b] \rightarrow [0, \infty], \quad \gamma(t) = z_0 + r(t)e^{i\varphi(t)} \\ \varphi &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \nu_\gamma(z_0) = \varphi(b) - \varphi(a) \end{aligned}$$



Beispiel 2

$$\begin{aligned} \gamma &: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = e^{it} + 0.1e^{3it} \\ \gamma_{0,1/2} &: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_{0,1/2}(+) = \frac{1}{2}e^{it} \\ \text{Ist das der Fall, dann ist } z \mapsto \frac{1}{z} &\text{ holomorph in } \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ \nu_\gamma(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{0,1/2}} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{4\pi} \frac{\frac{1}{2}ie^{it}}{\frac{1}{2}e^{it}} dt = 2 \end{aligned}$$



Hier Homotopie-Argument (Ausnutzen der Homotopie-Invarianz), da φ mit $\gamma = re^{i\varphi}$ sehr schwierig ist und auch $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$ direkt berechnen schwierig ist.

$$\text{Sei } H : [0, 4\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(t, s) := (1-s)\gamma(t) + s\gamma_{0,1/2}(t)$$

$$h \text{ stetig, } h(*, 0) = \gamma, \quad h(*, 1) = \gamma_{0,1/2}$$

$$\text{Bleibt z.z. } h(t, s) \neq 0 \forall t \in [0, 4\pi] \text{ und } s \in [0, 1]$$

Seien $t \in [0, 4\pi], s \in [0, 1]$. Dann ist

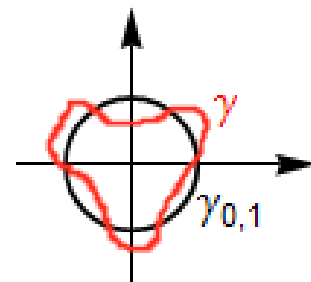
$$\begin{aligned} |h(t, s)| &= |(1-s)e^{it} + (1-s)\frac{1}{10}e^{3it} + s\frac{1}{2}e^{it}| = |(1-\frac{s}{2})e^{it} + \frac{(1-s)}{10}e^{3it}| \\ &\geq (1-s)|e^{it}| - \frac{(1-s)}{10}|e^{3it}| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} > 0 \end{aligned}$$

Damit sind γ und $\gamma_{0,1/2}$ homotop in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Alternativ:

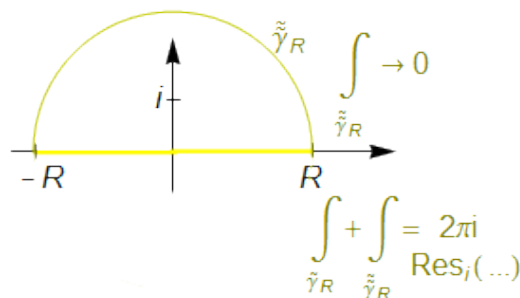
$$\gamma(t) = 1e^{it} + \frac{1}{10}e^{3it}$$

$$k(t, s) = (1-s)\gamma + s\gamma_{0,1}$$



Beispiel 3

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1} dx &=? \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\cos(z)}{z^2+1} dz \\ \text{mit } \gamma_R &: [0, R] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_R(x) = x \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{\cos(z)}{z^2+1} dz \\ \text{mit } \tilde{\gamma}_R &: [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{\gamma}_R(x) = x \\ \tilde{\tilde{\gamma}}_R &: [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{\tilde{\gamma}}_R(+) = Re^{it} \end{aligned}$$



Überlegungen:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \Re(e^{ix}) \\ \frac{e^{ix}}{(xe^{ix}-1)(xe^{ix}+1)} &= \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)} \\ \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx &= \Re \left(\int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)} dz \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{e^{iRe^{it}} \cdot Ri e^{it}}{R^2 e^{2it} + 1} \right| = \left| \frac{Re^{i(R+1)\cos(t)} + Re^{-(R+1)\sin(t)}}{R^2 e^{2it} + 1} \right| \\
& \leq \left| \frac{R \cos((r+1)\cos(t)) + i \sin(R+1)}{R^2 (\cos(2t) + i \sin(2t))} \right| \\
& \Rightarrow \dots \Rightarrow \int \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Dann kann man mit kleinem Kreis um Sngt. Laurent-Reihe bestimmen.

Beispiel 4 (Stabilität)

x_0 Gleichgewicht.

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t)) = \underbrace{f(x_0)}_{=0} + Df(x_0)(x(t) - x_0) + R(x(t) - x_0) \\
&\approx \underbrace{Df(x_0)}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}}(x(t) - x_0)
\end{aligned}$$

Eigenwerte, komplex, n-Stück: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$\Re(\lambda_1) < 0 \Rightarrow x_0$ stabil

$$V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Nachzurechnen: $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0$

$$\left. \begin{array}{l}
(*) \quad x_0 \text{ ist isol. Nullstelle von } f \\
(*) \quad x_0 \text{ ist striktes Minimum}
\end{array} \right\} \Rightarrow x_0 \text{ stabil (asymptotisch)}$$

$$f = \nabla G$$

$$V = -g \Rightarrow \langle \nabla v(x), f(x) \rangle$$

$$= \langle -\nabla g(x), \nabla g(x) \rangle = -|\nabla g(x)|^2 = -\|\nabla g(x)\|_2^2 \leq 0$$