

## 10 Präsenzblatt vom 24.1.13

### 10.1 Präsenz 10

Definition:

$$\begin{aligned} V : \psi &\rightarrow e^{-i\alpha_a \frac{r^a}{2}} \psi =: \psi' \\ A : \psi &\rightarrow e^{-i\gamma^5 \alpha_a \frac{r^a}{2}} \psi =: \psi' \\ \mathcal{L}(\psi) &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \end{aligned}$$

Ziel: durch Transformation V und A soll  $\mathcal{L}(\psi)$  auch für  $\mathcal{L}(\psi')$  gelten.

Vorgehen: Durch Umformung wird versucht, die Transformierte  $\mathcal{L}$  auf die ursprüngliche Form zurück zu führen, wobei Zusatzterme zusammengefasst werden.

**V:**

$$\psi' = e^{-i\alpha_a \frac{r^a}{2}} \psi = e^{-iv} \psi.$$

Da  $r^a$  die Pauli-Matrizen darstellt, die  $2 \times 2$  Dimension besitzen, sind sie in Betracht der 4  $\gamma^k$ -Matrizen als Skalar, also Forfaktor anzusehen. Daher Substitution und Behandlung als Vorfaktor.

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \psi^\dagger \gamma^0 \\ \psi' &= e^{-iv} \psi = \psi e^{-iv} \\ (\psi')^\dagger \gamma^0 &= e^{iv} \psi^\dagger \gamma^0 = \psi \gamma^0 e^{iv} \end{aligned}$$

Für  $\mathcal{L}$  gilt:  $\gamma^\mu \partial_\mu$  als vertauschbar mit  $e^{iv}$ , da Skalar.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}(\psi') &= (\psi')^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi' \\ &= e^{iv} \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{-iv} \psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{iv} e^{-iv} \psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = \mathcal{L}(\psi) \end{aligned}$$

Damit ist  $\mathcal{L}$  invariant unter V.

**A:**

$$\begin{aligned} \psi' &= e^{-i\gamma^5 \alpha_a \frac{r^a}{2}} \psi = e^{-iv\gamma^5} \psi. \\ (\psi')^\dagger \gamma^0 &= e^{iv\gamma^5} \psi^\dagger \gamma^0 = (1 + iv\gamma^5 - \frac{v^2}{2} \underbrace{(\gamma^5)^2}_{\mathbb{1}} - \frac{iv^3}{3!} \underbrace{(\gamma^5)^3}_{\gamma^5} + \dots) \gamma^0 \psi \end{aligned}$$

mit  $\gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^5$  gilt durch die Reihendarstellung:

$$\underbrace{(\dots)}_{\text{gerade exp.}} \mathbb{1} \gamma^0 + \underbrace{(\dots)}_{\text{ungerade k}} \gamma^5 \gamma^0 = \gamma^0 (\dots) - \gamma^0 (\dots) \gamma^5$$

Also  $e^{iv\gamma^5} \psi^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 e^{-iv\gamma^5} \psi^\dagger$

Für  $\mathcal{L}$  gilt hier:  $\gamma^\mu \partial_\mu$  ergibt wie bei Vertauschung mit  $\gamma^0$  ein negatives Vorzeichen im Exponenten, da  $\{\gamma^k, \gamma^5\} = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}(\psi') &= (\psi')^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi' \\ &= e^{iv\gamma^5} \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{-iv\gamma^5} \psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu e^{-(iv\gamma^5)} - m e^{-iv\gamma^5}) e^{-iv} \psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m e^{-2iv\gamma^5}) \psi = \mathcal{L}(\psi) \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{L}$  wegen m nicht invariant unter A