

1 Übungsblatt von Informatik 3 zum Mittwoch, den 27.4.2011

1.1 Aufgabe

- a) Sei $A = \sum_{i=1}^{10} ia_i$ und $B = \sum_{i=1}^{10} ib_i$ mit $b_i = a_i$ außer bei $b_j, j \in \{2, \dots, 10\}$ 7 8/9

Es gilt: A und B sind gültige ISBN-Nummern, $a_j \neq b_j$

Sei nun $a_1 = b_1$ (Prüfziffer, also Veränderung nicht erkennbar).

Dann muss $A = \sum_{i=1}^{10} ia_i \pmod{11} = 0$ und $B = \sum_{i=1}^{10} ib_i \pmod{11} = 0$,

also auch $(A - B) \pmod{11} = 0$

$$A - B = (a_1 - b_1) \cdot 1 + \dots + (a_j - b_j) \cdot j + \dots + (a_{10} - b_{10}) \cdot 10$$

$$= (a_1 - a_1) \cdot 1 + \dots + (a_j - b_j) \cdot j + \dots + (a_{10} - a_{10}) \cdot 10 = (a_j - b_j) \cdot j$$

Also muss gelten $(a_j - b_j) \cdot j \pmod{11} = 0$.

Da 11 Primzahl muss also $(a_j - b_j) \pmod{11} = 0$ oder $j \pmod{11} = 0$.

Da $j \in \{2, \dots, 10\} \not\subset \{0, 11\}$ und $(a_j - b_j) \in \{-10, \dots, -1, 1, \dots, 10\} \not\subset \{0, 11\}$ ist

also $(a_j - b_j) \cdot j \pmod{11} \neq 0$

Damit also $a_1 \neq b_1$, also Änderung einer Ziffer erkennbar. ✓

- b) Sei $A = \sum_{i=1}^{10} ia_i$ und $B = \sum_{i=1}^{10} ib_i$, mit $b_i = a_i$ 1
außer bei b_m und $b_n, m, n \in \{2, \dots, 10\}$

Es gilt: A und B sind gültige ISBN-Nummern, $a_n \neq a_m, m \neq n, b_m = a_n$ und $b_n = a_m$

Sei nun $a_1 = b_1$ (Prüfziffer, also Veränderung nicht erkennbar).

Also muss auch $(A - B) \pmod{11} = 0$ sein.

$$(a_1 - b_1) \cdot 1 + \dots + (a_m - b_m)m + \dots + (a_n - b_n)n + \dots + (a_{10} - b_{10}) \cdot 10$$

$$= (a_1 - a_1) \cdot 1 + \dots + (a_m - a_n)m + \dots + (a_n - a_m)n + \dots + (a_{10} - a_{10}) \cdot 10 =$$

$$(a_m - a_n)m + (a_n - a_m)n = (a_m - a_n)(m - n)$$

Also muss $(a_m - a_n)(m - n) \pmod{11} = 0$

Da $m - n \in \{-8, \dots, -1, 1, \dots, 8\} \not\subset \{0, 11\}$

und $(a_m - a_n) \in \{-10, \dots, -1, 1, \dots, 10\} \not\subset \{0, 11\}$

ist also $(a_m - a_n)(m - n) \pmod{11} \neq 0$

Damit also $a_1 \neq b_1$, also Änderung einer Ziffer erkennbar.

1.2 Aufgabe

Sei C_i jeweils $\{a_1, \dots, a_n\}$

- a) C_1 nicht decodierbar, da $a_6 a_2 a_7 = 10|01|211 = 100|12|11 = a_3 a_5 a_4$ ✓

b) ♣♠♥♦ Satz von Sardina Patterson:

$$S_1 = C_2, \hat{S}_2 = S_2 = \{\diamond, \heartsuit\}$$

$$\hat{S}_3 = \{\}, \tilde{S}_3 = \{\diamond\} \Rightarrow S_3 = \{\diamond\}$$

$$\hat{S}_4 = \{\}, \tilde{S}_4 = \{\diamond\} \Rightarrow S_4 = \{\diamond\} = S_3$$

$$\Rightarrow \bigcup S_i = \{\diamond, \heartsuit\}$$

$$(\bigcup S_i) \cap C_2 = \{\} \Rightarrow \text{decodierbar!}$$



c) Satz von Sardina Patterson:

$$S_1 = C_3, \hat{S}_2 = S_2 = \{\alpha\}$$

$$\hat{S}_3 = \{\}, \tilde{S}_3 = \{\alpha\} = S_2$$

$$\Rightarrow \bigcup S_i = \{\alpha\}$$

$$(\bigcup S_i) \cap C_3 = \{\} \Rightarrow \text{decodierbar!}$$



d) Satz von Sardina Patterson:

$$S_1 = C_4, \hat{S}_2 = S_2 = \{\} \Rightarrow \bigcup S_i = \{\}$$

$$(\bigcup S_i) \cap C_3 = \{\} \Rightarrow \text{decodierbar!}$$



1.3 Aufgabe

Zu zeigen/widerlegen: $Z = \sum_{i=1}^m q^{n_i} \leq 1 \Rightarrow C$ eind. decodierbar.

Oder umgeformt: C nicht eind. decodierbar $\Rightarrow Z = \sum_{i=1}^m q^{n_i} > 1$

Gegenbeispiel:

Sei B Alphabet $\{0, 1\}$, also $q = |B| = 2, C : Q \rightarrow B^*$ und $C = \{1, 10, 110\}$.

Code nicht decodierbar, da $a_1 a_2 = 1|10 = 110 = a_3$

Nach These nun also $Z > 1$. $Z = \sum_{i=1}^3 2^{-n_i} = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} = \frac{7}{8}$

Also Umkehrung der Implikation widerlegt.

