

Besprechung zu Blatt 1 zu Analysis 4

1.1 Aufgabe

1.2 Aufgabe

Sei $\mu = \{x_0\}, x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Z.z. $\exists (f_j) \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$ FF mit $f_j(x_0) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$.

Also $(f_j) \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$ ist FF $\Leftrightarrow f_j \leq f_{j+1}$

und $(\int_{\mathbb{R}} f_j dx)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ beschr.

Für $n = 1$ und $j \in \mathbb{N}, f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_j(x) = \begin{cases} 0 & , x \geq x_0 + \frac{1}{j} \\ -jx + 1 + jx_0 & , x \in [x_0, x_0 + \frac{1}{j}] \\ f_j(x_0 - x) & , x \in (-\infty, x_0] \end{cases}$$

für $x \in [x_0, x_0 + \frac{1}{j}]$:

$$mx_0 + b = 1 \Rightarrow b = 1 - mx_0$$

$$m(x_0 + \frac{1}{j}) + b = 0$$

$$\frac{m}{j} + 1 = m(x_0 + \frac{1}{j})1 - mx_0 = 0$$

$$\Rightarrow m = -j, \quad b = 1 + jx_0$$

Für $n \in \mathbb{N}$ allgemein, $j \in \mathbb{N}$ sei

$$f_j(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{R}^n \setminus W_j \\ -j\|x - x_0\|_{\infty} + 1 & , x \in W_j \end{cases}$$

Wobei $W_j := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_{\infty} < \frac{1}{j}\}$

f_j stetig: f_j stetig in $\mathbb{R}^n \setminus W_j$ (offen) und

in $\dot{W}_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_{\infty} = \frac{1}{j}\}$ (offen, da

$\|\cdot\|_{\infty}$ stetig als Metrik. Für $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - x_0\|_{\infty} = \frac{1}{j}$

und $(x_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x_k \rightarrow x$ gilt.

$$x_k \in W_j : f_j(x_k) = -j\|x_k - x_0\|_{\infty} + 1 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} -j \underbrace{\|x - x_0\|_{\infty}}_{\frac{1}{j}} + 1 = 0$$

$$x_k \notin W_j : f_j(x_k) = 0 = -j\|x - x_0\|_{\infty} + 1 = f_j(x)$$

f_j hat kompakten Träger: $\text{supp} f_j = f_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \bar{W}_j = W_j$ (kp)

(f_j) hat außerdem weitere folgenden Eig.:

- $f_j(x_0) = -j\|x_0 - x_0\|_{\infty} + 1 = 1$

- $\int_{\mathbb{R}^n} f_j dx = \int_{\mathbb{R}^n} (-j\|x_0 - x\|_{\infty} + 1) dx$

$$= \int_{x_0 - \frac{1}{j}}^{x_0 + \frac{1}{j}} \dots \int_{x_0 - \frac{1}{j}}^{x_0 + \frac{1}{j}} (-j\|x - x_0\|_{\infty} + 1) dx_1 \dots dx_n$$

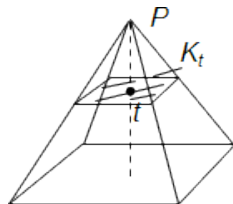
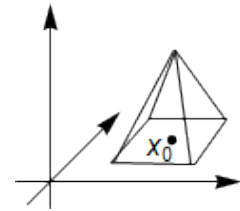
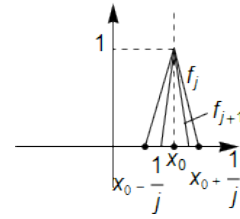
$$= \int_0^1 K_t dt, \quad K_t := mt + b \text{ mit } K_0 = \text{vol}(W_j), \quad K_1 = \text{vol}\{x_0, 1\} = 0$$

$$= \int_0^1 (-\text{vol}(W_j)t + (\text{vol}(W_j))) dt = \text{vol}(W_j) \int_0^1 (-t + 1) dt = \frac{1}{2} \text{vol}(W_j)$$

$$= \frac{1}{2} (x_0 + \frac{1}{j} - (x_0 - \frac{1}{j}))^n = \frac{1}{2} \frac{2^n}{j^n} = \frac{2^{n-1}}{j^n} \leq \frac{2^{n-1}}{1^n} = 2^{n-1}$$

Sei für $j \in \mathbb{N}$, $g_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ def. durch $g_j := \sum_{k=1}^j f_k(2^k(x + x_0) + x_0)$

Beh. (g_j) ist FF mit $g_j(x_0) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$



$$g_j = \sum_{k=1}^j f_k(2^k(x_0 - x_0) + x_0) = \sum_{k=1}^j f_k(x_0) = \sum_{k=1}^j 1 = j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow g_j \text{ stetig.}$$

$$\text{supp} = g_j = \overline{g_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}$$

$$g_j(x) \neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{\|2^k(x - x_0) + x_0 - x_0\|_\infty}_{=2^k\|x-x_0\|_\infty} \leq \frac{1}{k} \quad \forall 1 \leq k \leq j$$

$$\Leftrightarrow \forall 1 \leq k \leq j \text{ gilt } \|x - x_0\|_\infty \leq \frac{2^{-k}}{k} \leq 1$$

$$\text{supp}(g_j) \leq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_\infty \leq 1\} \text{ (kp.)}$$

Da $f_k \geq 0 \forall \mu$ gilt: $g_j \leq g_{j+1}$

$$\text{Da } \int_{\mathbb{R}} f_k dx \leq 2^{n-1} \text{ ist } \int_{\mathbb{R}^n} g_j dx = \sum_{k=1}^j \int_{\mathbb{R}^n} f_j(2^k(x - x_0) + x_0) dx$$

$$= \sum_{k=1}^j \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) (2^k)^n dx \text{ (Transformationsatz)}$$

$$= \sum_{k=1}^j \frac{1}{2^{nk}} \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x) dx \leq \sum_{k=1}^j \frac{1}{2^k} 2^{n-1} \leq 2n - 1$$

1.3 Aufgabe

$$(f_j), (g_j) \text{ FF.}, (h_j) := \max\{f_j, g_j\}$$

Z.z. (h_j) FF.

$$h_j = \max\{f_j, g_j\} = \frac{1}{2}(f_j + g_j) + \frac{1}{2}|f_j - g_j| \text{ stetig als Komposition von st. Fu.}$$

$$\overline{h_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} \leq \overline{f_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup g_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}$$

$$\leq \overline{f_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} \cup \overline{g_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} = \text{supp}(f_j) \cup \text{supp}(g_j) \text{ kp.}$$

$$\int_{\mathbb{R}} h_j dx = \int_{\mathbb{R}} \max\{f_j, g_j\} dx$$

$$\text{Sei } m_1 := \min(f_1), \quad m_2 := \min(g_1), \quad m_0 := \min\{m_1, m_2\}$$

$$\text{Dann ist } m_0 \leq f_j, m_0 \leq g_j \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow f_j - m_0, g_j - m_0 \geq 0$$

$$|f_j - g_j| = |(f_j - m_0) - (g_j - m_0)| \leq |f_j - m_0| + |g_j - m_0| = f_j - m_0 + g_j - m_0$$

$$\int_{\mathbb{R}} h_j dx = \int_{\mathbb{R}} \max\{f_j, g_j\} dx \leq \int_{\mathbb{R}} (|f_j| + |g_j|) dx \leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |f_j| dx}_{<c} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |g_j| dx}_c$$

Beh. $\int < c: \exists c > 0$.

Dafür ist z.z.: für FF is auch $(\int_{\mathbb{R}} |f_j| dx)_{j \in \mathbb{N}}$ beschr.

$$D := f_1^{-1}((-\infty, 0)). \text{ Wegen } f_j \leq f_{j+1} : f_j^{-1}((-\infty, 0)) \leq D.$$

Weiter ist $D \leq \text{supp}(f_1)$ und $\text{supp}(f_1)$ kp $\Rightarrow D$ beschr., $\text{vol}(D)$ beschr.

$$(f_j) \text{ FF} \Rightarrow \exists c > 0 \text{ mit } \int_{\mathbb{R}^n} f_j dx \leq c \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\text{Sei } m := \min\{f_1\} \leq f_j \forall j \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Dann ist } \int_{\mathbb{R}^n} |f_j| dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus D} \underbrace{|f_j|}_{=f_j} dx + \int_D \underbrace{|f_j|}_{=-f_j \leq -f_1 \leq |m|} dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus D} f_j dx + \text{vol}(D)|m|$$

usw...(Beweis im StudIp nachgereicht)

Z.z. $h_j \leq h_{j+1}$

$$f_j(x) \leq g_j(x) : h_j(x) = \max\{f_j(x), g_j(x)\} = g_j(x) \leq g_{j+1}(x) \leq \max\{g_{j+1}(x), f_{j+1}(x)\} = h_{j+1}(x)$$

$$g_j(x) \leq f_g(x) \text{ genauso.}$$

1.4 Aufgabe

1.5 Aufgabe

U Unterraum der Dimension k , o.E. $U = \mathbb{R}^k \times \{0\} \in n - k$

Wir erhalten ein k -Gitter G .

$$G = \{(l_1, \dots, l_k, 0) \in \mathbb{R}^n \mid l_1, \dots, l_k \in \mathbb{Z}\}$$

$$O := \{[p_1 - 1, p_1 + 1] \times \dots \times [p_k - 1, p_k + 1] \times \dots\}$$

$$\text{vol} Q_1 = 2, \text{vol}(Q_2) = \text{vol}(\tilde{Q}_2) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{N} \ni k \geq 2, \text{vol}(Q_k) = \text{vol}(\tilde{Q}_k) = \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$O = \{Q_1\} \cup \{Q_k, \tilde{Q}_k \mid k \in k \geq 2\}$$

$$O \text{ abz.}, U \subseteq \bigcup_{Q \in O} Q$$

$$\text{vol}(O) = \sum_{Q \in O} \text{vol}(Q) = 2 + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 4$$

$$Q_\varepsilon := \{(x, \varepsilon y \mid (x, y) \in Q\}, Q \in O$$

$$O_\varepsilon := \bigcup_{Q \in O} \{Q_\varepsilon\} \Rightarrow \text{vol}(Q_\varepsilon) = \varepsilon \cdot \text{vol}(O) \leq 4\varepsilon$$

Rest Studip.

