

I Codierung ohne Kanalen

1. Allgemeines über Codes:

- Def:
- Zeichen sind Elemente einer endlichen Menge von untersch. Dingen.
Diese Menge nennt man Zeichenvorrat oder Alphabet
Diese Dinge können Lichtimpulse, Magnetschw., Spannungen, Töne usw. sein.
 - Ein Wert besteht aus Zeichen eines Alphabets.
Die Wortlänge gibt an, wieviele Zeichen des Alphabets das Wort hat.
 - M sei ein Alphabet. Dann ist M^* die Menge aller Worte die sich durch Zeichen dieses Alphabets darstellen lassen.
 - Es seien A, B Alphabete. Dann ist die Codierung von Zeichen aus A nach Worten nach B^* definiert durch eine injektive Abb. $\varphi: A \rightarrow B^*$
d.h. jedem Wert $a \in A$ wird genau ein Wort aus B^* zugeordnet und jedem Wort aus B^* entspricht genau ein Zeichen aus A .

Beispiel: 7 Bit ASCII-Code:

$$A = \{a_1, \dots, a_{26}\}, B = \{0, 1\}, \varphi: A \rightarrow B^* \text{ Codierung}$$

5. Codierung v. Worten aus A

Es seien A und B Alphabete und es gelte $\varphi(a) \in B^*$ für $a \in A$.

Es sei a_1, a_2, \dots, a_k ein Wort aus A . Dann ist $\varphi^*: A^* \rightarrow B^*$ def. durch:

$$\varphi^*(a_1, a_2, \dots, a_k) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)\varphi(a_3)\dots\varphi(a_k)$$

Beispiel: Ostermann $\in A^*$, $a_i \in A$, $\varphi^*(\text{Ostermann}) = \varphi(o)\varphi(s)\varphi(t)\dots\varphi(n)$

$\varphi(a_i) \in B^*$ ist eine injektive Abb., $\varphi^*(A^*) \rightarrow B^*$ muss keine inj. Abb. sein.

6. Ein Alphabet mit nur 2 Zeichen heißt lineares Alphabet

Ein " " 3 " terinäres Alphabet usw.

Es sei B ein Alphabet mit q Zeichen, dann schreibt man $q = |B|$

Beispiel: a) Dinäre Alphabete: Diese verwendet man in technischen Bereichen um mit Computern zu arbeiten.

b) q-näre Alphabete: Alphabete mit $q > 2$ verwendet man in d. Biologie, Physik, etc.
Wenn man mit einem zum Problem passenden Alphabet arbeitet (natürlich) (zufällig $q \geq 2$)

2. Decodieren:

Man hat einen Wert von B^* und möchte genau das Urbild des Wertes haben.

a) Das Urbild ist ein Zeichen von A . Da $\varphi: A \rightarrow B^*$ eine injekt. Abb. ist das Urbild eindeutig bestimmt

b) Das Urbild sei ein Wort über A z.B. der Wert $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$, $\varphi^*(a_1, \dots, a_k) = \varphi(a_1)\dots\varphi(a_k) \in B^*$

Man kann nur decodieren, wenn man die Nahtstellen zwischen den Worten $\varphi(a_i)\varphi(a_j)$ kennt

$\varphi(a_i)$, $a_i \in A$ nennt man codewort.

a) Codes mit fester Wortlänge

\Rightarrow die Nahtstelle zw. den Codeworten kann man durch Abzählen j Zeichen aus B finden.

$\Rightarrow \varphi^*: A^* \rightarrow B^*$ ist eine inj. Abb. \Rightarrow decodierbar (eindeutig)

b) Codes mit variabler Wortlänge

Hier lässt sich die Nahtstelle der einzelnen Codeworte nicht immer finden.

Beispiel: -Codes mit fester Wortlänge:

1) 7-Bit-ASCII-Code (128 Zeichen) 26 groß, 27 klein Lat., 28 Sonder, 10 Ziffern, 32 Steuer, 6...

2) Telexschreibcode (7 Bit code, 5 Bit Info, 1 Start, 1 Schluss)

3) Lochstreifencode (7 Bit info, 1 Bit für Loserfehler)

4) 8 Bit EBCDIC-Code (Zeichensatz wie ASCII-Code + 1 Bit)

5) 12-Bit Lochkartencode usw

-Codes mit variabler Wortlänge:

Morsecode: Alphabet hat 3 Zeichen (0) z.B. k. l. pause.

Beispiele:

Es sei $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{0, 1\}$

a)	$a_1 00$	5)	$a_1 0$	c)	$a_1 0$	d)	$a_1 010$
	$a_2 01$		$a_2 10$		$a_2 01$		$a_2 11000$
	$a_3 10$		$a_3 110$		$a_3 10$		$a_3 01000$
	$a_4 11$		$a_4 1110$		$a_4 11$		$a_4 00110$

Beispiel a: feste Wortlänge \Rightarrow decodierbar
 Beispiel b bis d: Man betrachte die Folgen v. Codewerten.

- p) $\varphi(a_1, a_2, a_3, a_4) = 0101101111$ bei Code b
- q) $\varphi(\dots) = 011010110$ bei Code c
- r) $\varphi(\dots) = 010110100101001010$ bei Code d

Man betrachte die Wortfolge γ unter dem Code c: $\varphi(a_1, a_2, a_3, a_4) = 011010110 = 010110110 = 0100110$
 \Rightarrow nicht decodierbar da Nahtstelle n. eindeutig.

Man betrachte die Wortfolge β unter dem Code b: 0100011000 , ankommende Bitfolge

Bei diesem Code ist Decodieren immer möglich, wenn man ein Wortende findet.
 Von diesem Wortende lässt sich d. Code v. rechts nach links decodieren.

Man betrachte die Fälle: 1) $010001100010\dots$, 2) 0100011000110
 zu 1): \neq weil 0 \Rightarrow Wort fängt mit 0 an. 3 Zeichen 0 \Rightarrow Ende. $\Rightarrow 010001100010\dots$
 zu 2): $010:00110:00110\dots = 0100011000110\dots$
 $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$
 \Rightarrow links \rightarrow rechts nicht decodierbar

Def: Suffixcode:
 Bei einem suffixcode ist kein Codewort Endstück eines anderen Codewort.


Satz: Ein Suffixcode ist immer decodierbar. Es lässt sich nur v. rechts nach links decodieren.

Beim Suffixcode hat man eine Verzögerung beim Decodieren (da rechts \rightarrow links)

Präfixcode

Def (Fano-Bedingung): Ein Code heißt Präfixcode, wenn kein Codewort Anfangsstück eines anderen Codewortes ist.

Satz: Ein Präfixcode ist ohne Verzögerung decodierbar. (Code b ist Präfixcode)

Präfixcodes werden automatisch decodiert mit dem Codebaum:


Der Codebaum:

Es sei B ein Alphabet mit $q = |B|$. Es sei $C = \{a_1, \dots, a_n\}$ ein Code über B^*
 Man startet mit der Wurzel. Die Wurzel und jeder Knoten d. Baumes hat maximal q Kinder.
 Man trägt die Codewörter in diesen Codebaum ein. Die Urbilder der Codewörter liegen
 auf Knoten oder Blättern des Baumes. Alle Wege, die zu keinem Urbild eines
 Codewortes führen, werden aus dem Baum gestrichen.

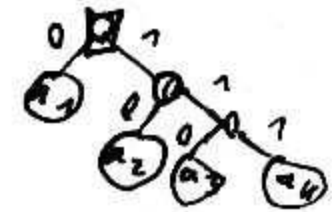
\Rightarrow Liegen alle Urbilder der Codewörter auf Blättern des Codebaumes, dann hat
 man einen Präfixcode. Der Code ist eindeutig decodierbar.

Man startet die Decodierung, indem man von der Wurzel den Baum durchläuft
 bis zu einem Blatt. Damit ist der 1. Codewort decodiert.

Das Urbild steht in dem Blatt. Dann startet man neu. Endet man wieder
 auf einem Blatt, dann hat man das Urbild des nächsten Codewortes.

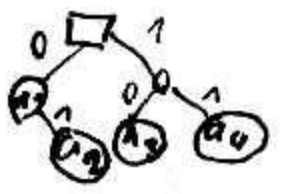
Liegt das Urbild eines Codewortes auf einem Knoten und nicht in einem Blatt
 dann hat man keinen Präfixcode. Der Code ist dann nicht immer eindeutig decodierbar.

Beispiel b: $q = |B| = 2, B = \{0, 1\}$



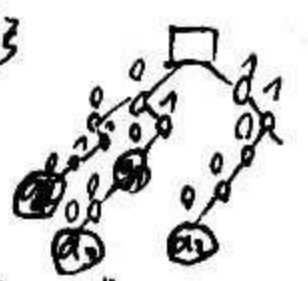
Die Urbilder der Codewörter liegen
 auf Blättern. Man hat einen
Präfixcode. Der Code ist eindeutig
decodierbar.

Beispiel c: $q = |B| = 2, B = \{0, 1\}$



Ein Urbild liegt nicht auf einem
Blatt, sondern auf einem Knoten.
 \Rightarrow Der Code ist kein Präfixcode!
 Es kann hier keine Aussage über d. Decodierung
 gemacht werden

Beispiel d: $q = |B| = 2, B = \{0, 1\}$



Nicht alle Urbilder liegen auf Blättern
 \Rightarrow der Codebaum liefert keine Aussage über d.
Decodierung

Ein Suffixcode ist (eindeutig) decodierbar. Ein Suffixcode von hinten gelesen (rechts \rightarrow links)
 ist ein Präfixcode \Rightarrow Man kann einen Suffixcode mit dem Codebaum decodieren

Beispiel d: \Rightarrow Alle Urbilder liegen auf Blättern. Der Code ist
 über den Codebaum (eindeutig) decodierbar.



Andere Codes als Prä- und Suffixcode decodierbar?
 Die Nahtstelle zwischen 2 Codewörtern muss erkennbar sein.

Beispiel: $c = \{1, 101, 1001, 10001\}$
 Der Code c ist kein Präfixcode und auch kein Suffixcode. Genau zwischen den Bits 11 liegt die Nahtstelle zwischen 2 Codewörtern \Rightarrow Der Code ist decodierbar

Satz von Sardina Patterson:

Es sei B ein Alphabet mit $q = |B| \geq 2$. B^* sei die Menge aller Worte über B . B^+ sei identisch mit B^* ohne das leere Wort. Es sei c ein Code über B : $c = \{a_1, \dots, a_n\}$, $a_i \in B^*$.

Es sei $\hat{S}_i = \{w \in B^+ \mid \exists w_1 \in c \text{ und } \exists w_2 \in S_{i-1} \text{ mit } w_2 = w_1 w\}$
 $\tilde{S}_i = \{w \in B^+ \mid \exists w_1 \in S_{i-1} \text{ und } \exists w_2 \in c \text{ mit } w_2 = w_1 w\}$. Es sei $S = \bigcup S_i$

Der Code ist eindeutig decodierbar $\Leftrightarrow c \cap S = \emptyset$

Problem: Wie weit muss man die S_i berechnen, um Subtilien zu kennen?
 Abbruchbedingungen:

1. Gilt für ein $i_0: S_{i_0} = \emptyset$, dann gilt $S_i = \emptyset \forall i \geq i_0$
2. Gilt für ein $i_0: S_{i_0} = S_{i_0+1}$, dann $S_{i_0+h} = S_{i_0} \forall h \in \mathbb{N}$.
3. Gilt für ein $i_0: S_{i_0+j} = S_{i_0} \quad j > 1$, dann $\forall r = 0(1)(j-1) \Rightarrow$ Nur $(j+1)$ die S_i berechnen
4. Gilt für ein $S_{i_0} \subset c \cap S_{i_0} \neq \emptyset$ dann ist der Code nicht decodierbar.

Beispiel: Es sei $c = \{010, 11000, 01000, 00110\}$. Man startet mit $c = S_0$

1. Berechnung v. S_1 : $\hat{S}_1 = \{w \in B^+ \mid \exists w_1 \in c \text{ und } \exists w_2 \in S_0 \text{ mit } w_2 = w_1 w\}$

$w_1 = 010 \Rightarrow w_2 = 01000 \Rightarrow w = 00$
 $w_1 = 11000 \Rightarrow \nexists w_2$
 $w_1 = 01000 \Rightarrow \nexists w_2$
 $w_1 = 00110 \Rightarrow \nexists w_2$
 $\tilde{S}_1 = \hat{S}_1$ weil $S_0 = c \Rightarrow S_1 = \hat{S}_1 \cup \tilde{S}_1 = \{00\}$

2. Berechnung v. S_2 : $\hat{S}_2 = \{w \in B^+ \mid \exists w_1 \in c \text{ und } \exists w_2 \in S_1 \text{ mit } w_2 = w_1 w\}$

$\tilde{S}_2 = \{w \in B^+ \mid \exists w_1 \in S_1 \text{ und } \exists w_2 \in c, w_2 = w_1 w\}$
 $w_1 = 010 \Rightarrow \nexists w_2$
 $w_1 = 11000 \Rightarrow \nexists w_2$
 $w_1 = 01000 \Rightarrow \nexists w_2$
 $w_1 = 00110 \Rightarrow \nexists w_2$
 $\tilde{S}_2 = \emptyset$

$\tilde{S}_2: w_1 = 00 \Rightarrow w_2 = 00110 \Rightarrow w = 1103 \Rightarrow S_2 = \tilde{S}_2 \cup \hat{S}_2 = \{1103\}$

3. Berechnung v. $S_3: \dots \Rightarrow S = \{00, 1103\} \Rightarrow c \cap S = \emptyset$

Ein nicht decodierbarer Code lässt sich häufig durch Hinzufügen eines passenden Präfix oder Suffix in einen decodierbaren Code umwandeln. Hierbei wird aber die Wortlänge verändert.

Beispiel: $a_1 = 0, a_2 = 010, a_3 = 01, a_4 = 10 \Rightarrow a_4$ Suffix v. a_2, a_1 Suffix v. a_3, a_1, a_4 Präfix v. a_2, a_3

Es gilt $a_1 a_n = a_2 \Rightarrow$ Code nicht decodierbar.
 Man hänge an jedes Codewort die Endung 01 an
 $\Rightarrow a_1 = 001, a_2 = 01001, a_3 = 0101, a_4 = 1001 \Rightarrow$ Präfixcode.

Satz von Ungleichung von McMillan:

Es sei B ein Alphabet mit $q = |B| \geq 2$. Sei c ein Code über B^* mit Codewörtern $a_i \in B^*$

Die Codewörter a_i haben die Wortlängen n_i .

Der Code sei eindeutig decodierbar. Dann gilt $z = \sum_{i=1}^n q^{-n_i} \leq 1$ für die Codewörter (a_1, \dots, a_n)

Dieses ist eine notwendige Bedingung für die Decodierbarkeit

Beweis: Es sei nun $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_n = n$, $z = \sum_{i=1}^n q^{-n_i}$. $z^2 = z \cdot z = \sum_{i=1}^n q^{-n_i} \sum_{j=1}^n q^{-n_j} = \sum_{k=0}^{2n} q^{-k} f(z, k)$

$= \sum_{k=1}^{2n} q^{-k} f(z, k)$ mit $f(z, k) = 0$ für $k < i_1 + j_1 \Rightarrow f(z, k) \leq q^k$

Dieses ist eine obere Schranke über die maximale Anzahl von verschickten Worten.

$z^2 \leq \sum_{k=0}^{2n} q^{-k} q^k = \sum_{k=0}^{2n} 1 = 2n+1$, $(z^2)^r = z^{2r} = \sum_{k=0}^{2r} q^{-k} f(z, k)$, $k = n_1 + n_2 + \dots + n_n$

$f(z, k) \leq q^k$ maximaler Unterschied, d.h. hier Unterschied auf jedem Zeichen

$z = \sqrt{2n+1} \leq \sqrt{r \cdot 1} \Rightarrow z \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} = 1 \Rightarrow z \leq 1$

Satz: Ungleichung v Kraft

Es sei B ein Alphabet mit $q = |B| \geq 2$. Es seien n_1, \dots, n_m m natürliche Zahlen.

und es gelte $\sum_{i=1}^m q^{-n_i} < 1$.

Dann ex. ein Präfixcode mit Codewörtern v. B^* und den Codewortlängen n_i .

Beweis:

$\max_{i=1}^m n_i = l$, $\mu(i) =$ Anzahl aller n_i mit $i = n_i$. $z = \sum_{i=1}^m q^{-n_i} = \sum_{i=1}^l \mu(i) q^{-i} \leq 1 \mid q^l$

$\sum_{j=1}^l \mu(j) q^{l-j} = \mu(l) q^{l-l} + \sum_{j=1}^{l-1} \mu(j) q^{l-j} \leq q^l \Rightarrow 1 \leq \mu(l) \leq q^l - \sum_{j=1}^{l-1} \mu(j) q^{l-j}$, $(\mu(l) \leq q^l - \sum_{j=1}^{l-1} \mu(j) q^{l-j})$

$0 < q^l - \sum_{j=1}^{l-1} \mu(j) q^{l-j} : q \Rightarrow 0 < q^{l-1} - \mu(1) q^{l-1} - (l-1) - \sum_{j=1}^{l-2} \mu(j) q^{l-1-j} (1 + \mu(l-1))$
 $0 \leq \mu(1) < q^{l-1} - \sum_{j=1}^{l-2} \mu(j) q^{l-1-j} : q \Rightarrow \dots \Rightarrow 0 \leq \mu(3) < q^3 - \mu(2) q - \mu(1) q^2 : q$
 $0 < q^2 - \mu(2) - \mu(1) q (1 + \mu(2)) \Rightarrow 0 \leq \mu(2) < q^2 - \mu(1) q : q$
 $\Rightarrow 0 < q - \mu(1) (1 + \mu(1)) \Rightarrow \mu(1) < q$. Nun Codebaum! Wurzel: q Kinder.
 $\mu(1)$ dieser Kinder macht man zu Blättern. Hier schreibt man Urbilder der Codesorte
 Länge 1 rein. Es bleiben $q - \mu(1) > 0$ Kinder, die zu Knoten werden.
 Jeder dieser Knoten hat q Kinder. \Rightarrow 2te Stufe: $(q - \mu(1))q$ Kinder
 Dann $\mu(2)$ Kinder zu Blättern. Möglich? $\exists \mu(2) < q^2 - \mu(1)q \Rightarrow \mu(2) < (q - \mu(1))q \Rightarrow$ mehr Kinder
 als Blätter. Man macht $\mu(2)$ Kinder zu Blättern und $(q - \mu(1))q - \mu(2)$ Kinder zu Knoten.
 Jeder Knoten hat q Kinder. \Rightarrow 3. Stufe $((q - \mu(1))q - \mu(2))q$ Kinder $= q^3 - \mu(2)q^2 - \mu(1)q$
 Davon $\mu(3)$ Blätter. Möglich. $\mu(3)$ Kinder zu Blättern, Rest Knoten, usw.
 Hiermit ist ein Präfixcode konstruiert mit den Wortlängen $n_i, i = 1(1)n$

Anwendung:
 Man hat einen eindeutig decodierbaren Code. Dieser Code ist schwer decodierbar.
 Mit dem Satz von Kraft konstruiert man sich einen Präfixcode mit den gleichen
 Wortlängen. Dieser Code ist einfach decodierbar

Beispiel:
 Die Ungleichung v. McMillan ist nur eine notwendige Bedingung für einen eindeutig
 decodierbaren Code über B mit $|B|=q=2$. Es sei $C = \{010, 01100, 103\}$ Code \neq McMillan günstig.
 $Z = \sum_{i=1}^3 q^{-n_i} = 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-2} = \frac{7}{16} < 1$. $010, 01100, 10 = 01101010010$

Informationstheorie von Schlannoch

Man betrachte eine Nachrichtenguelle oder auch einfach Quelle.
 Die Quelle gibt Signale von sich. Man möchte diese Signale codieren, um sie zu konservieren.
 Man unterscheidet zwischen:

- a) Kontinuierliche Quelle (kont. Signale)
- b) diskrete Quelle (diskrete Signale)

Man betrachte endlich viele verschiedene Signale aus diskreten Quellen. \Rightarrow Signale bilden A .
 Um die Auftretenswahrscheinlichkeit der Signale zu erfassen, arbeitet man mit dem
Wahrscheinlichkeitsraum $S = (A, p)$.

$p(a)$ für $a \in A$ gibt an (wie häufig (rel. Häufigkeit) Signal a auftritt) mit welcher Wahrschk. ...
 Man unterscheidet zwischen:

- 1) diskrete Quellen mit Gedächtnis. Hier ist p abh. v. vorher & nachher ges. Zeichen.
- 2) diskrete Quellen ohne Gedächtnis. Hier p abh. v. ges. Zeichen.

Jetzt Quellen ohne Gedächtnis \Rightarrow Wahrsch. ant. rel. Häufigkeit
 Es gilt nun: $0 \leq p(a_i) \leq 1 \forall a_i \in A$. $p(a_i) = 1$, falls 100%. $p(a_i) = 0$, falls 0%.

Informationsgehalt eines Zeichens

Der Informationsgehalt eines Zeichens $I(a), a \in A$ ist der Informationsgewinn, wenn
 das Zeichen a aus der Quelle ausgegeben wird. Es gilt:

- 1) Ist $a \in A$ selten auftretend, dann Inf. Gewinn sehr groß, da un erwartet
- 2) Der Inf. Gewinn einer Zeichenkette $I(r; a_1; a_2; \dots; a_n) = \sum_{i=1}^n I(a_i)$
- 3) Der Inf. Gewinn eines Zeichens, das jetzt kommen muss, ist 0, da erwartet und eingeplant.

Die einfachste Funktion, die diese Bedingungen an den Inf. Gehalt beschr. ist $I(a) = \log_2 \left(\frac{1}{p(a)} \right), a \in A$
 $I(a)$ ist bis auf konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Es gilt $\frac{1}{\log_2(x)} = \frac{\log_e(x)}{\log_e(2)}$

Beispiel:
 In der deutschen Sprache tritt der Buchstabe b mit Wahrscheinlichkeit $0,016$ auf.
 $\Rightarrow I(b) = \log_2 \left(\frac{1}{p(b)} \right) = \log_2 \frac{1}{0,016} = 5,97$

Def: Mittlere Informationsgehalt

Der mittlere Inf. Gehalt einer Quelle mit $S(A, p)$ ist def. durch:

$H(S) = \sum_{a \in A} p(a) \log_2 \frac{1}{p(a)} = \sum_{a \in A} p(a) I(a) = - \sum_{a \in A} p(a) \log_2(p(a))$

Die Entropie des endlichen Wahrscheinlichkeitsraumes $S = (A, p)$ ist def. durch:

$H(S) = - \sum_{a \in A} p(a) \log_2(p(a))$ (in Physik Maß für Unordnung eines Systems)

Quellen Codierung:

- a) um die Quelle zu erfassen und zu konservieren, später weiter verarbeiten.
- b) Quelle zu erfassen und komprimiert abzuspeichern

Jetzt weiter mit b).

Es sei $\varphi: A \rightarrow B^*$ ein Code. Die Wortlänge von $\varphi(a)$, $a \in A$ sei $\lambda(\varphi)$
 Dann ist die mittlere Wortlänge def. durch $\bar{\lambda}(\varphi, s) = \sum_{a \in A} p(a) \lambda(\varphi)$

Satz: Es gilt: $(B \text{ Alphabet, } \varphi: A \rightarrow B^*, |B|=q)$

$$1) \bar{\lambda}(\varphi, s) \geq H(s) / \log(q)$$

$$2) \bar{\lambda}(\varphi, s) = H(s) / \log(q) \Rightarrow p(a) = q^{-\lambda(\varphi(a))} \quad \forall a \in A$$

Beweis:

Der Code sei eindeutig decodierbar. $\Rightarrow z = \sum_{a \in A} q^{-\lambda(\varphi(a))} \leq 1$ (McMillan), $\mu(a) = \frac{q^{-\lambda(\varphi(a))}}{z}$

$$\text{Es gilt: } H(s) = \sum_{a \in A} p(a) \log\left(\frac{1}{p(a)}\right) \stackrel{?}{\geq} \sum_{a \in A} p(a) \log\left(\frac{1}{\mu(a)}\right) = \sum_{a \in A} p(a) \log\left(\frac{1}{p(a)}\right) - \sum_{a \in A} p(a) \log\left(\frac{1}{\mu(a)}\right) \stackrel{?}{\leq} 0$$

$$= \sum_{a \in A} p(a) \left(\log\left(\frac{\mu(a)}{p(a)}\right) - 1 \right) \leq 0$$