2 Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 27.4.2011

2.1 Aufgabe

Definition für offene Menge M:
$\forall x \in M \exists \delta > 0: \ B(x, \delta) \subset M$
Sei nun unsere Kugel $B_{||\cdot||_\infty}$, damit achenparallele Quader.
Also existiert um alle Punkte aus M ein Quader das Teilmenge von M ist.
Da also M die Vereinigung aller $x \in M$ und die Quader darum ebenfalls Teilmenge M, ist die vereinigung der Quader M.
Dabei müssen die Grenzflächen der Quader paarweise disjunkt sein, um doppelt auftretende Elemente zu verhindern.

Alternativ: Benutze Raster quaderförmiger Einheiten der Breite a in M und übernehme so alle Quader im Raster, die vollständig in M liegen.
Im Randbereich von M wird in die übrigen Quader-Teile ein feineres Raster mit Quaderbreiten $b < a$ (z.b. $a/4$) gelegt.
Nach unendlicher Iteration ergibt sich M als Vereinigung der Quader.

2.2 Aufgabe

Da wir aus $C \subset [0, 1]$ nur offene Intervalle entfernen, ist C abgeschlossen. Da $C \subset [0, 1]$, ist C beschr., also kompakt.

Da wir in der Konstruktion in jedem Iterationsschritt alle bestehenden Intervalle in 2 kleinere Intervalle $\neq \emptyset$ konvertieren und $\mathbb{R}$ dicht ist, verschwindet bei keiner Iteration auch nur ein Intervall, sondern es kommt immer 1 Intervall dazu (die Anzahl der Intervalle betrachtend). Also ergeben sich nach unendlich vielen Iterationsschritten unendlich viele, nicht leere Intervalle, also unendlich viele Zahlen zwischen 0 und 1. Damit ist C überabzählbar.

ε-Definition Nullmenge N:
$\forall \varepsilon > 0 \exists Quader\ Q_j(Mpkt, Seitenlänge/2) : \sum_j vol(Q_j) < \varepsilon$ und $N \subset \bigcup_j Q_j$
Um entsprechende Quader zu konstruieren, wählen wir zu Beginn den ersten Quader um $Q(0.5, 0.5)$, also das Intervall $[0, 1]$ einschließend. Dabei ist $vol(Q) = 1$
Im 1. Iterationsschritt benötigen wir 2 Quader: $Q_1(1/6, 1/6), \ Q_2(5/6, 1/6)$, also $vol(Q_1) + vol(Q_2) = \frac{2}{9}$.
Wir setzen das Verfahren induktiv fort: nach n Iterationen erhalten wir 2^n Intervalle und entsprechend 2^n Quader, wobei der Mittelpunkt der Quader Q_j jeweils auch der Mittelpunkt des Intervalls ist.
Die halbe Seitenlänge ist dabei jeweils $\frac{1}{2*3^n}$,
das Gesamtvolumen also $2^n \cdot (\frac{2}{2*3^n})^2 = \frac{2^n}{3^{2n}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0 < \varepsilon$.
Da wir die Intervalle der Cantor-Menge selbst zu Quadern gemacht haben, überdeckt die Vereinigung natürlich C.

Also C Nullmenge.

2.3 Aufgabe

Dini:

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kp., $u_j, u^* : K \to \mathbb{R}$ stetig, $u_j \leq u_{j+1} (j \in \mathbb{N})$.
Wenn $u_j \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} u^*$ punktweise, dann auch gleichmäßig,
also $\lim\limits_{j \to \infty} \sup\limits_{x \in K} |u_j - u^*| = 0$

Durch $B_j = \{x \in K \big| |u_j - u^*| < \varepsilon\}$ mit $\varepsilon > 0$ können wir eine Überdeckung von K erreichen, da $u_j \to u^*$ punktweise.
Da $u_j \leq u_{j+1}$ ist $B_j \subset B_{j+1}$. Mit K kompakt reicht eine Vereinigung aus endlich vielen Teilüberdeckungen zur Überdeckung aus. Für $j \to \infty$ ergibt sich also ein j_0, sodass für alle $j \geq j_0$ gilt: $B_j = K$, also $|u_j - u^*| < \varepsilon$.

2.4 Aufgabe

Zum Beweis bilden wir ein allgemeines g, das die Bedingung erfüllt:

$$g(x) := \begin{cases} 1 & , x \in L \\ 0 & , x \notin L + B(0,\varepsilon) \\ 1 - \frac{\min\limits_{x_0 \in L}(dist(x,x_0))}{\varepsilon} & , x \in (L + B)(0,\varepsilon) \setminus L \end{cases}$$

Beweis, dass g stetig:

x genau ε von nächstem $x_0 \in L$ entfernt:
$\min\limits_{x_0 \in L}(dist(x,x_0)) = \varepsilon \Rightarrow 1 - \frac{\min\limits_{x_0 \in L}(dist(x,x_0))}{\varepsilon} = 1 - 1 = 0$
Abstand x zum nächsten $x_0 \in L$ geht gegen 0:
$\min\limits_{x_0 \in L}(dist(x,x_0)) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\min\limits_{x_0 \in L}(dist(x,x_0))}{\varepsilon} = 1 - 0 = 1$
Damit Übergang stetig.

Zwischen Abstand 0 und ε entspricht die Funktion einer Geraden, also stetig. Ab ε und in L ist sie Konstant. Also g stetig.
Da $supp(g(x)) = L + B(0,\varepsilon)$, also beschr. und abg., also kp. ist $g(x) \in C_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Da $g(x) = 0 \ \forall x \notin L + B(0,\varepsilon)$ ist also $supp(g(x)) = L + B(0,\varepsilon)$