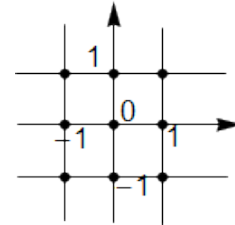


Besprechung zu Blatt 2 zu Analysis 4

2.1 Aufgabe



$$G_0 := \mathbb{Z}^n, O_0 := \{p + [0, 1]^n \mid p \in G_0\}$$

$$j \in \mathbb{N} : G_j := \{p \in \mathbb{R}^n \mid 2^j p \in G_0\}$$

$$O_j := \{p + [0 + \frac{1}{2^j}]^n \mid p \in G_j\}$$

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

rekursive Definition:

$$O_n^U := \phi_0$$

$$O_j^U := \{Q \in O_j \mid Q \subseteq U \setminus \underbrace{\bigcup_{\tilde{Q} \in O_{j-1}^U} \tilde{Q}}_{\phi_0}\}$$

$$O^U := \bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} O_j^U$$

$$\text{Beh.: } U = \bigcup_{Q \in O^U} Q$$

„ \subseteq “: klar

„ \supseteq “: Sei $x \in U$. Da U offen, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $\underbrace{x + [-\varepsilon, \varepsilon]^n}_{B_{\|\cdot\|_\infty}} \subseteq U$

Für $j \in \mathbb{N}$ groß genug ist $2^{j-1} > \frac{1}{\varepsilon}$.

Dann $x + [0, \frac{1}{2^j}]^n \subseteq x + [-\varepsilon, \varepsilon]^n \subseteq U$

Es gibt $p \in G_j$ mit $x \in p + [0, \frac{1}{2^j}]^n =: Q$

Dann ist für $y \in Q$:

$$\|x - y\|_\infty \leq \underbrace{\|x - p\|_\infty}_{\leq \frac{1}{2^j}} + \underbrace{\|p - y\|_\infty}_{\leq \frac{1}{2^j}} \leq \frac{1}{2^{j-1}} \leq \varepsilon$$

d.h. $Q \subseteq B_{\|\cdot\|_\infty}(x, \varepsilon) \subseteq U$

1. Fall: $\exists \tilde{Q} \in O_{j-1}^U$ mit $Q \cap \tilde{Q} \neq \emptyset$

$$Q \cap \tilde{Q} \subseteq \partial Q \text{ für alle } \tilde{Q} \in O_{j-1}^U$$

$$\Rightarrow Q \subseteq U \setminus \bigcup_{\tilde{Q} \in O_{j-1}^U} \tilde{Q} \Rightarrow Q \in O_j^U$$

$$\Rightarrow x \in Q \subseteq \bigcup_{\tilde{Q} \in O^U} \tilde{Q}$$

$$Q \cap \tilde{Q} \neq \emptyset \Rightarrow Q \subseteq \tilde{Q}$$

$$\Rightarrow x \in Q \subseteq \bigcup_{\tilde{Q} \in O_j^U} \tilde{Q}$$

2. Fall: $Q \cap \bigcup_{\tilde{Q} \in O_j^U} \tilde{Q} \Rightarrow Q \subseteq U \setminus \bigcup_{\tilde{Q} \in O_{j-1}^U} \tilde{Q}$

$$\Rightarrow Q \in O_j^U$$

$$\Rightarrow x \in Q \subseteq \bigcup_{\tilde{Q} \in O^U} \tilde{Q} \Rightarrow U \subseteq \bigcup_{\tilde{Q} \in O^U} \tilde{Q}$$

2.2 Aufgabe

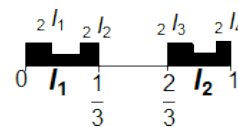
Idee:

Schritt n : 2^n Intervalle der Länge $\frac{1}{3^n}$

$$nI_i, i \in \{1, \dots, 2^n\}$$

$$N_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} nI_i$$

$$N = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n \subseteq [0, 1]$$



$\Rightarrow N$ beschr., N abg. $\Rightarrow N$ kp.

$$N \leq N_n, \quad \mu(N) = \sum_{i=1}^{2^n} \mu(nI_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$$

$$N \xrightarrow{\text{bijektiv}} \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_n) \subseteq \mathbb{R} \mid x_n \in \{0,1\}, n \in \mathbb{N}\}$$

$$\xrightarrow{\text{bijektiv}} \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{bijektiv}} [0,1] \text{ überabz.}$$

$\Rightarrow N$ überabz.

Rest: siehe Zusatzblatt:

Blatt 2

Aufgabe 2:

Konstruktion: Anfang $n=0$: ${}_0a_1 := 0, {}_0b_1 := 1, {}_0I_1 := [{}_0a_1, {}_0b_1]$.

$$N_0 := {}_0I_1.$$

$n \rightarrow n+1$: Haben Zahlen ${}_na_1$ bis ${}_na_{2^n}$ und ${}_nb_1$ bis ${}_nb_{2^n}$.

Intervalle ${}_nI_1$ bis ${}_nI_{2^n}$ mit ${}_nI_i = [{}_na_i, {}_nb_i]$.

$$\text{mit } \overline{{}_nb_i} \text{ --- } \overline{{}_na_i} \quad i \in \{1, \dots, 2^n\}.$$

Sei für $i \in \{1, \dots, 2^n\}$

$${}_{n+1}a_{2^{i-1}} := {}_na_i \quad , \quad {}_{n+1}b_{2^{i-1}} := {}_na_i + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$${}_{n+1}a_{2^i} := {}_nb_i - \frac{1}{3^{n+1}} \quad , \quad {}_{n+1}b_{2^i} := {}_nb_i$$

$${}_{n+1}I_i := [{}_{n+1}a_i, {}_{n+1}b_i] \quad , \quad i \in \{1, \dots, 2^{n+1}\}$$

$$N_{n+1} := \bigcup_{i=1}^{2^{n+1}} I_i.$$

$$\text{Sei } N := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n.$$

z.z.: N ist Nullmenge, kompakt und überabzählbar.

Es ist für $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, 2^n\}$ ${}_n I_i$ kompakt, da
 ${}_n I_i = [{}_n a_i, {}_n b_i]$ kompakt. Damit ist für $n \in \mathbb{N}$
 $N_n = \bigcup_{i=1}^{2^n} {}_n I_i$ kompakt als endliche Vereinigung
kompakter Mengen. Somit ist N kompakt als
abzählbare Schnittmenge kompakter Mengen.

Weiter ist ${}_n b_i - {}_n a_i = 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$ und ist somit für ein
 $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in \{1, \dots, 2^n\}$ ${}_n b_i - {}_n a_i = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Es folgt für alle $i \in \{1, \dots, 2^n\}$

$$i \text{ gerade} \Rightarrow {}_{n+1} b_i - {}_{n+1} a_i = {}_n b_{\frac{i}{2}} - \left({}_n b_{\frac{i}{2}} - \frac{1}{3} {}_n a_{\frac{i}{2}}\right) = \frac{1}{3} {}_n a_{\frac{i}{2}}$$

$$i \text{ ungerade} \Rightarrow {}_{n+1} b_i - {}_{n+1} a_i = {}_n a_{\frac{i+1}{2}} + \frac{1}{3} {}_n a_{\frac{i+1}{2}} - \left({}_n a_{\frac{i+1}{2}} - \frac{1}{3} {}_n b_{\frac{i+1}{2}}\right) = \frac{1}{3} {}_n b_{\frac{i+1}{2}}$$

$\Rightarrow ({}_n I_i)_{i \in \{1, \dots, 2^n\}}$ disjunkt.
es folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{vol}(N_n) &= \sum_{i=1}^{2^n} \text{vol}({}_n I_i) = \sum_{i=1}^{2^n} ({}_n b_i - {}_n a_i) = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{3} {}_n a_i \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

\Rightarrow (mit ε -Charakterisierung) $N_n \supseteq N$ ist Nullmenge.

Die $\varphi: N \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_n) \in \mathbb{R} \mid x_n \in \{0, 1\} \forall n \in \mathbb{N}\}$
definiert durch

$$x \in N \Rightarrow x \in N_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Zu $n \in \mathbb{N}$ $\exists i_n \in \{1, \dots, 2^n\}$ mit $x \in {}_n I_{i_n}$

$$(\varphi(x))_n := \begin{cases} 0 & , \text{ falls } i \text{ ungerade} \\ 1 & , \text{ falls } i \text{ gerade} \end{cases}$$

φ ist bijektiv, denn: surjektiv klar, und für $x_1, x_2 \in N$
mit $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ ist $x_1, x_2 \in {}_n I_{i_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
und somit

$$|x_1 - x_2| \leq {}_n b_{i_n} - {}_n a_{i_n} = \frac{1}{3} {}_n a_{i_n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$\rightarrow x_1 = x_2.$$

Man ist mit dem binären Zahlensystem $\varphi_2: \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$
mit φ bijektiv möglich. Sei $\varphi_3: \{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ definiert
durch $\varphi_3(x_n) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{10^n}$ bijektiv. Damit ist

$$\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1: N \rightarrow [0, 1] \text{ bijektiv.}$$

Da $[0, 1]$ überabzählbar ist, ist auch N überabzählbar.

2.3 Aufgabe

Seien K kp. $(n_j) \subseteq C^0(K)$, $u^* \in C^0(K)$

$u_j \leq u_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{N}, u_j \rightarrow u^*$ pktweise.

Beh.: $u_j \rightarrow u^*$ glm. auf K , d.h. $\sup_{x \in K} u^*(x) - u_j(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

Bew.: Seien $v_j := u^* - u_j$, $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(v_j) \subseteq C^0(K)$

$v_j \geq v_{j+1}$, $0 \leq v_j \rightarrow 0$ pktweise in K .

z.z.: $\sup_{x \in K} v_j(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$

Angenommen, es gibt $\varepsilon > 0$ und $(j_k) \subseteq \mathbb{N}$, (j_k) streng monoton wachsend mit

$\sup_{x \in K} v_{j_k}(x) > \varepsilon$

Sei $(x_{j_k}) \subseteq K$ mit $v_{j_k}(x_{j_k}) = \sup_{x \in K} v_{j_k}(x)$

O.E. $x_{j_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ für ein $x \in K$

Da $v_{j_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ pktweise in K gibt es ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit

$|v_{j_k}(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall k \geq k_1$

Da v_{k_1} stetig, gibt es ein $k_2 \in \mathbb{N}$ mit $k_2 \geq k_1$ und

$|v_{j_{k_1}}(x_{j_k}) - v_{j_{k_2}}(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall k \geq k_2$

Damit gilt für $k \geq k_2 \geq k_1$

$\varepsilon < \sup_{y \in K} v_{j_k}(y) = v_{j_k}(x_{j_k}) \leq v_{j_{k_1}}(x_{j_k}) \leq v_{j_{k_1}}(x) + \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$ Widerspruch!

2.4 Aufgabe

Sei L kp.

Gesucht ist $g \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq g \leq 1$, $g|_L = 1$

$\text{supp}(g) \subseteq L_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, L) \leq \varepsilon\}$

Für eine beliebige Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Funktion

$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \text{dist}(x, A)$ stetig.

Sei $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon)}{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) + \text{dist}(x, L)}$

g ist stetig, wenn g wohldefiniert ist. Das ist hier der Fall, denn für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) = 0 \Rightarrow x \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon}$

$\Rightarrow \text{dist}(x, L) \geq \varepsilon \Rightarrow \underbrace{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon)}_{=0} + \underbrace{\text{dist}(x, L)}_{\geq \varepsilon} > 0 \neq 0$

$\text{dist}(x, L) = 0 \Rightarrow \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) + \text{dist}(x, L) \geq \varepsilon \neq 0$

$\text{supp}(g) \subseteq L_\varepsilon$

$x \in \mathbb{R}^n: g(x) := \frac{\overbrace{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon)}^{\geq 0}}{\underbrace{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) + \text{dist}(x, L)}_{\geq 0}} \geq 0$

$g(x) \leq \frac{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) + \text{dist}(x, L)}{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) + \text{dist}(x, L)} = 1$

$x \in L: g(x) = \frac{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon)}{\underbrace{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon) + \text{dist}(x, L)}_{=0}} = \frac{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon)}{\text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus L_\varepsilon)} = 1$

