Blatt 1

Aufgabe 1

Beh.: Ist α stetig differenzierbar, dann existiert $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$ für alle $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Bew.: Da α stetig differenzierbar ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta_0 > 0$ mit

$$|\alpha'(x) - \alpha'(y)| < \varepsilon \qquad \forall\, x,y \in [a,b],\ |x-y| < \delta_0.$$

Da f auch stetig, gibt es $\delta_0 > \delta > 0$, so daß für alle Zerlegungen (t_j) von $[a,b]$ mit Feinheit kleiner als δ, $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ gilt

$$\left| \int_a^b f(x) \cdot \alpha'(x)\, dx - \sum_j (f(\xi_j)\, \alpha'(\xi_j)) \cdot (t_j - t_{j-1}) \right| < \varepsilon$$

(z. B. Riemannsummen). ~~Dann gilt~~ Es gibt $\eta_j \in [t_{j-1}, t_j]$ mit $\alpha'(\eta_j) = \dfrac{\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}$. Somit ist

$$|\alpha'(\eta_j) - \alpha(\xi_j)| < \varepsilon$$

da

$$|\eta_j - \xi_j| \leq t_j - t_{j-1} < \delta_0.$$

Es folgt für eine Zerlegung (t_j) von $[a,b]$ mit Feinheit kleiner als δ, $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$

$$\left| \int_a^b f(x)\cdot\alpha'(x)\,dx - \cancel{\int_a^b} \sum_j f(\xi_j)\,(\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1}))\right|$$

$$\le \left|\sum_j f(\xi_j)\big(\alpha'(\xi_j)\,(t_j-t_{j-1}) - (\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1}))\big)\right| + \varepsilon$$

$$\le \sum_j (t_j-t_{j-1})\cdot|f(\xi_j)| \cdot \left|\alpha'(\xi_j) - \underbrace{\frac{\alpha(t_j)-\alpha(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}}}_{=\alpha'(\eta_j)}\right|$$

$$\le \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\cdot\sum_j(t_j-t_{j-1})\cdot\underbrace{|\alpha'(\xi_j)-\alpha'(\eta_j)|}_{<\varepsilon}$$

$$\le \varepsilon\cdot\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\cdot\underbrace{\sum_j(t_j-t_{j-1})}_{=b-a}$$

$$= \varepsilon\cdot\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\cdot(b-a)$$

Blatt 1

Aufgabe 2:

$$h_j = \max\{f_j, g_j\} = \frac{1}{2}(f_j + g_j) + \frac{1}{2}|f_j - g_j| \text{ stetig}$$

$$\operatorname{supp} h_j \subseteq \operatorname{supp} f_j \cup \operatorname{supp} g_j \Rightarrow \operatorname{supp} h_j \text{ kompakt.}$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$.

$f_j(x) \geq g_j(x)$: $\quad h_j(x) = \max\{f_j(x), g_j(x)\} = f_j(x) \leq f_{j+1}(x)$

$$\leq \max\{f_{j+1}(x), g_{j+1}(x)\} = h_{j+1}(x).$$

Beh ⊛: Ist (f_j) eine FF, so ist $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_j|\, dx\right)$ beschränkt.

Beweis von Beh. ⊛ ~~später~~ unten.

Weiter mit Aufgabe 2:

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_j\, dx \leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}(f_j + g_j)\, dx}_{\text{beschränkt in } j,\ \text{da } (f_j), (g_j) \text{ FF.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} (|f_j| + |g_j|)\, dx}_{\text{beschränkt in } j,\ \text{nach Beh. ⊛ und } (f_j), (g_j) \text{ FF.}}$$

$$\Rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} h_j\, dx\right)_{j \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt}$$

$$\Rightarrow (h_j) \text{ FF.}$$

Beweis von Beh. ⊛: Sei (f_j) eine FF. Seien

$$f_j^{\pm} := \max\{\pm f_j, 0\}.$$

$$\Rightarrow f_j = f_j^+ - f_j^- \quad , \quad |f_j| = f_j^+ + f_j^-.$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j^+ \, dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f_j \, dx}_{\substack{\text{beschränkt} \\ \text{in } j \text{, da} \\ (f_j) \text{ FF}}} + \int_{\mathbb{R}^n} f_j^- \, dx$$

Sei $m := \min f_1$. Dann ist

$$m \leq -f_j^- \leq -f_{j+1}^- \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Wie oben sieht man, daß $f_1^- = \max\{-f_1, 0\}$ wieder stetig ist mit kompakten Träger. Damit ist für ein $R \in \mathbb{R}$ $\operatorname{supp} f_1^- \subseteq B(0;R)$ und somit

$\operatorname{supp} f_j^- \subseteq B(0;R)$. Also ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j^- \, dx = \int_{B(0;R)} \underbrace{f_j^-}_{\leq -m \leq |m|} \, dx \leq |m| \cdot B(0;R).$$

$$\Rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_j^+ \, dx \right)_{j \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f_j| \, dx = \underbrace{\underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f_j^+ \, dx} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} f_j^- \, dx}}_{\text{beschränkt in } j} .$$

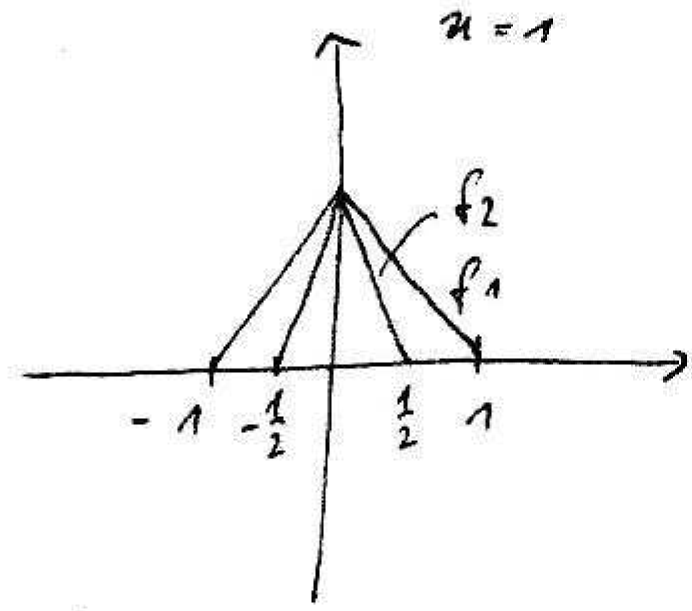
Blatt 1

Aufgabe 2:

O.E. $x_0 = 0$. Zuerst Konstruktion einer besonderen Funktionenfolge (f_j):

Für $n=1$: $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_j(x) := \begin{cases} -2^j\,|x|+1 & , \ |x| \le \frac{1}{2^j} \\ 0 & , \ \text{sonst}. \end{cases}$$



Dann ist f_j stetig, hat kompakten Träger

$$\operatorname{supp} f_j = \left[-\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right] \subseteq [-1,1] \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

und es gilt $f_j(0) = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} f_j(x)\,dx = 2\cdot \int_0^{\frac{1}{2^j}} (2^j x + 1)\,dx = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^j}.$$

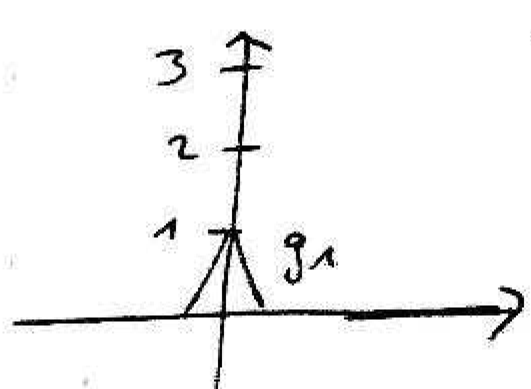
~~Für n=~~ Sei $g_j : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $j\in\mathbb{N}$, $g_j := \sum_{k=1}^{j} f_k$.

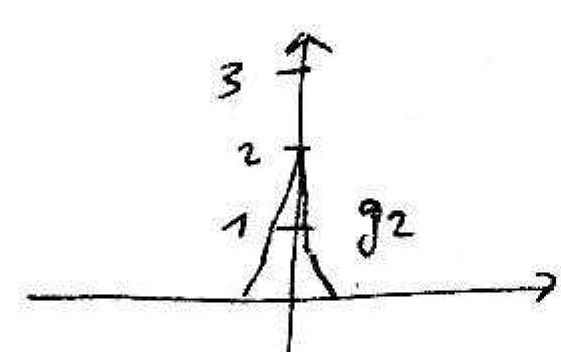
Dann ist $\operatorname{supp} g_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{j} \operatorname{supp} f_k \subseteq [-1,1]$, g_j stetig,

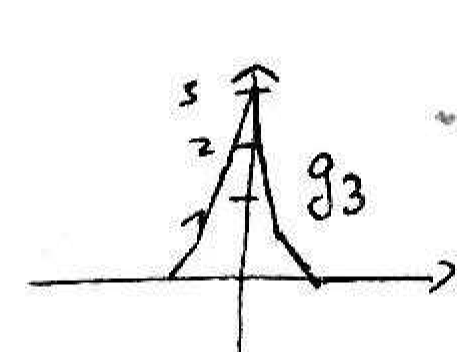
wegen $f_k \geq 0 \ \forall k\in\mathbb{N}$ ist $g_j \le g_{j+1}$ und es gilt

$$g_j(0) = \sum_{k=1}^{j} \underbrace{f_k(0)}_{=1} = j \to \infty \quad (j\to\infty),$$

$$\int_{\mathbb{R}} g_j(x)\,dx = \sum_{k=1}^{j} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$





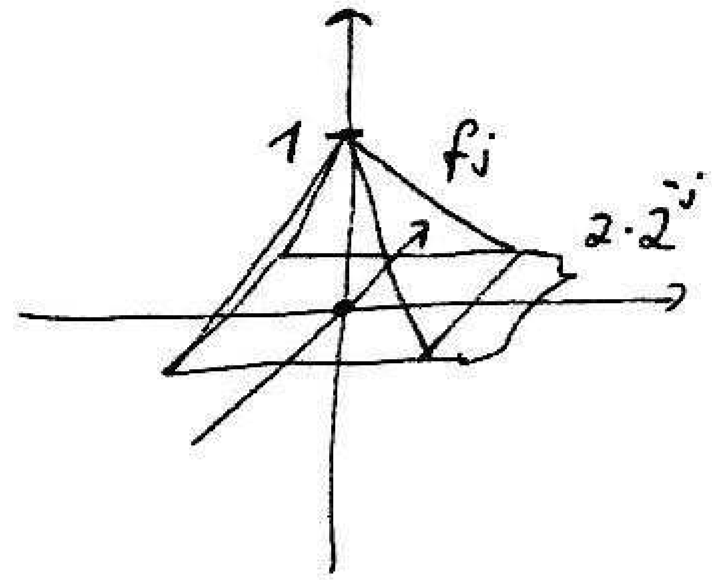


Für $n \in \mathbb{N}$ beliebig geht der Beweis ähnlich:

$$f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

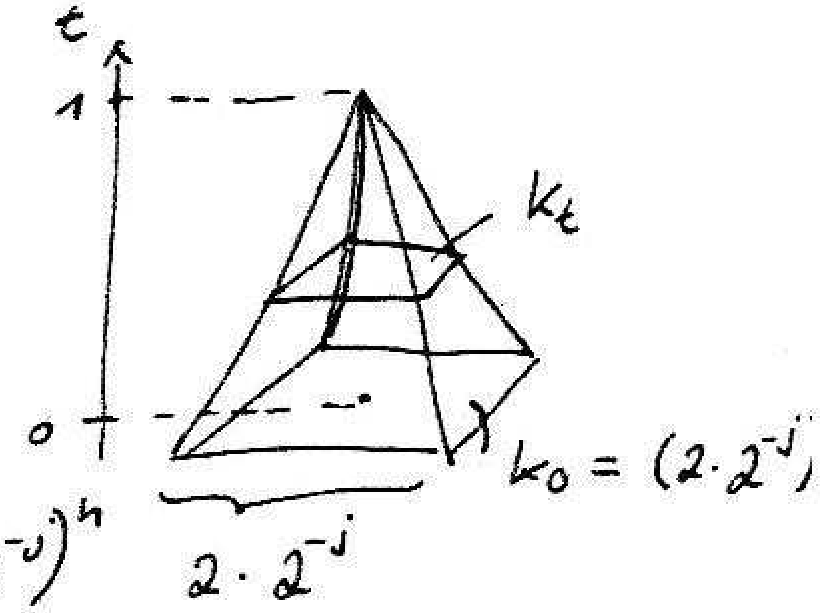
$$f_j(x) := \begin{cases} -2^j \, \|x\|_\infty + 1 & , \ \|x\|_\infty \le \frac{1}{2^j} \\ 0 & , \ \text{sonst}. \end{cases}$$

Dann f_j stetig mit kompakten Träger



$$\operatorname{supp} f_j \subseteq \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \le \tfrac{1}{2^j} \}$$
$$\subseteq \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \le 1 \},$$

$$f_j(0) = 1,$$



$$\int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\,dx = \int_0^1 \operatorname{vol} K_t \, dt$$

$t \mapsto \operatorname{vol} K_t$ ist linear mit

$\operatorname{vol} K_1 = 0$ und $\operatorname{vol} K_0 = (2 \cdot 2^{-j})^n$

$$\Rightarrow \quad t \mapsto \operatorname{vol} K_t = -(2 \cdot 2^{-j})^n \cdot t + (2 \cdot 2^{-j})^n$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\,dx = \int_0^1 \left(-(2 \cdot 2^{-j})^n \cdot t + (2 \cdot 2^{-j})^n \right) dt = \frac{(2 \cdot 2^{-j})^n}{2}$$

$$= 2^{n-1} \cdot 2^{-jn} \le 2^{n-1} \frac{1}{2^j}.$$

Für $g_j := \sum_{k=1}^{j} f_k$ verfahre wie im Fall $n=1$.

Insgesamt ist (g_j) eine FF mit $g_j(0) \to \infty \ (j \to \infty)$.
Also ist $\{0\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.

Blatt 1

Aufgabe 4:

Sei (g_j) die FF aus Aufgabe 2 zu $n=1$. Dann ist

$$\operatorname{supp} g_j \subseteq [-1,1] \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \text{und} \; 0 \leq g_j \leq j.$$

Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} g_j(x)dx < c \quad \forall j \in \mathbb{N}$. Sei $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijektiv. Sei $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, def. durch

$$f_j(x) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \cdot g_j(x - \varphi(k)).$$

Das ist wohldefiniert, da

$$0 \leq f_j(x) = \sum_{\cancel{k \in \mathbb{N}}\; k=1}^{j} \frac{1}{2^k} g_j(x-\varphi(k)) \leq \sum_{\cancel{k \in \mathbb{N}}\; k=1}^{j} \frac{1}{2^k} j$$

$$= j \cdot \sum_{\cancel{k \in \mathbb{N}}\; k=1}^{j} \frac{1}{2^k} \leq j.$$

f_j ist stetig und hat kompakten Träger

$$\operatorname{supp} f_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{j} \underbrace{\operatorname{supp} g_j(\cdot - \varphi(k))}_{\text{kompakt.}} \text{ beschränkt}$$

Weiter gilt

$$f_j(x) = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} \underbrace{g_j(x-\varphi(k))}_{\leq g_{j+1}(x-\varphi(k))} \leq \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} g_{j+1}(x-\varphi(k))$$

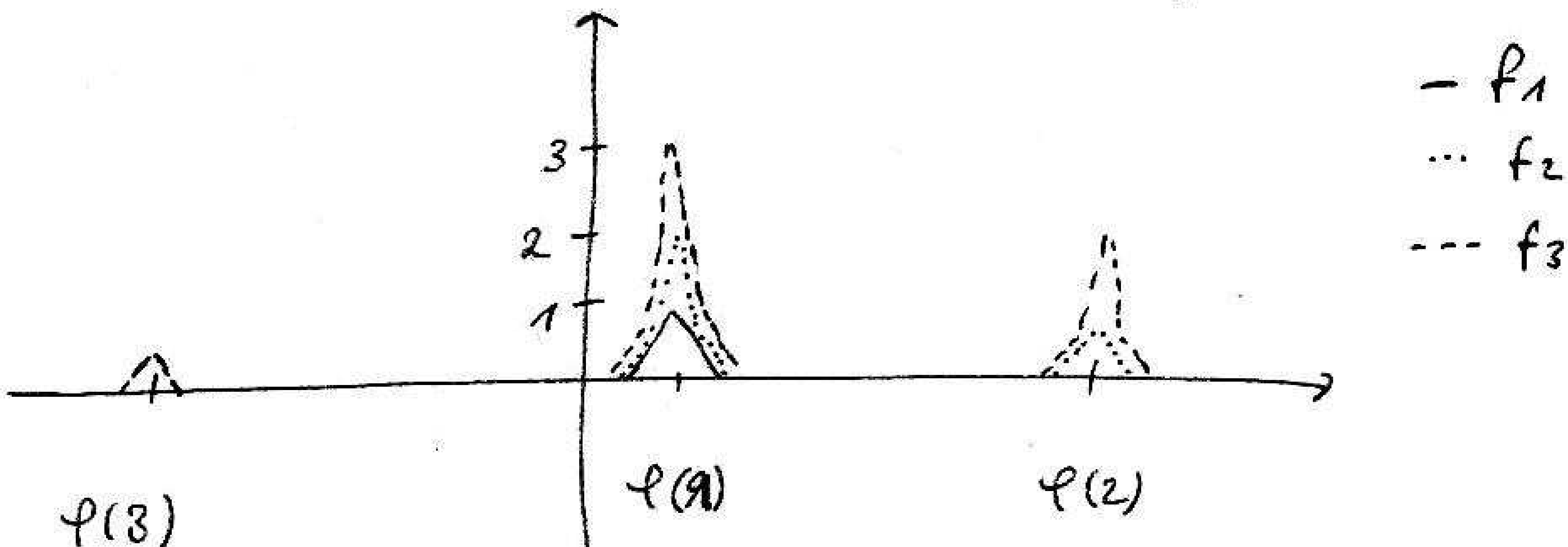
$$\leq \sum_{k=1}^{j+1} \frac{1}{2^k} g_{j+1}(x-\varphi(k)) = f_{j+1}(x),$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_j(x)\,dx = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g_j(x-\varphi(k))\,dx}_{= \int_{\mathbb{R}} g_j(x)\,dx \,\le\, c} \le c \cdot \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} \le c.$$

$\Rightarrow$ (f_j) ist eine FF.

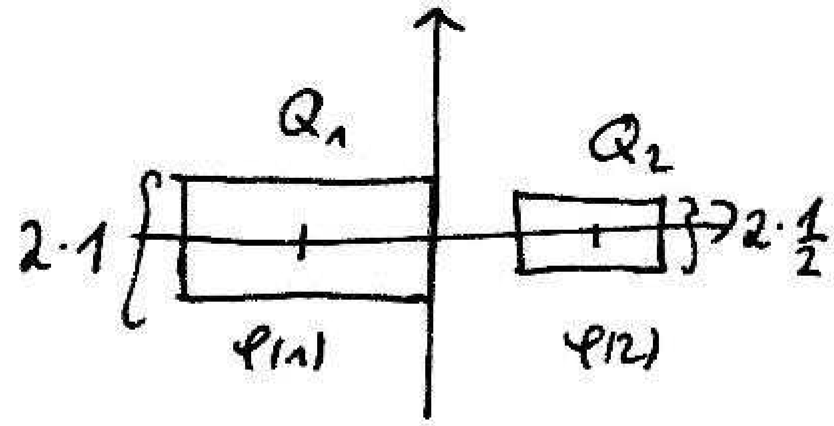
Weiter gibt es für $q \in \mathbb{Q}$ ein $l \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(l) = q$. ~~Sei $j \ge$~~
Für $j \ge l$ gilt

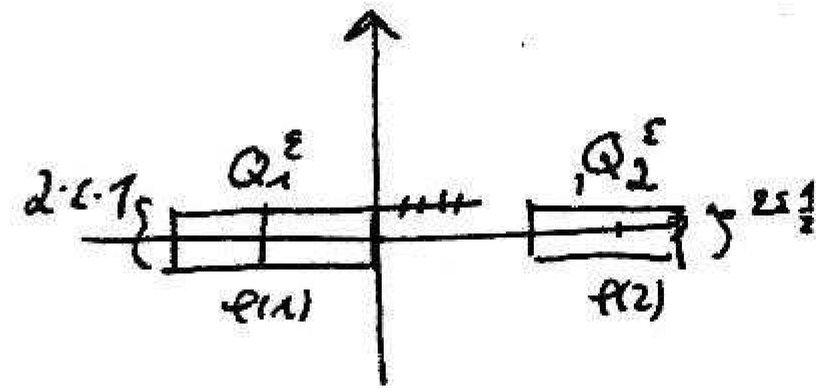
$$f_j(q) = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k}\, g_j(q - \varphi(k)) \ge \frac{1}{2^k} \cdot \underbrace{g_j(q - \varphi(l))}_{\cancel{\to\infty\ f\equiv}\ = g_j(0) = j} = \frac{1}{2^k} \cdot j \xrightarrow{j\to\infty} \infty.$$



Blatt 1

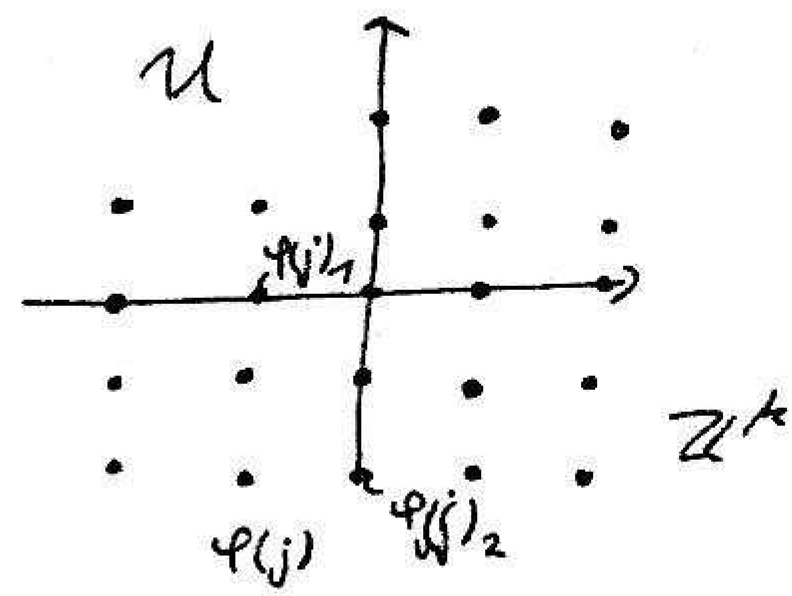
Aufgabe 5:





O.E. $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}^k \times \{0\}$, $k := \dim \mathcal{U} < n$.

Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^k$ bijektiv, für $j \in \mathbb{N}$



$$Q_j := [\varphi(j)_1 - 1, \varphi(j)_1 + 1] \times \dots \times [\varphi(j)_k - 1, \varphi(j)_k + 1] \times \left[-\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right]^{n-k} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Dann ist $\mathcal{U} \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$ und es ist

$$\mathrm{vol}(Q_j) = \big(\varphi(j)_1 + 1 - (\varphi(j)_1 - 1)\big) \cdot \ldots \cdot \big(\varphi(j)_k + 1 - (\varphi(j)_k - 1)\big) \cdot \left(\frac{1}{2^j} - \left(-\frac{1}{2^j}\right)\right)^{n-k}$$

$$= 2^k \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2^j}\right)^{n-k} \leq 2^k \frac{1}{2^{j-1}}$$

$$\Rightarrow \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{vol}\, Q_j \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^k \cdot \frac{1}{2^{j-1}} = 2^k \cdot \underbrace{\sum_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{2^j}}_{=2} = 2^{k+1}$$

Sei $\varepsilon > 0$. O.E. $\varepsilon < 1$.

Sei nun für $j \in \mathbb{N}$

$$Q_j^\varepsilon := [\varphi(j)_1 - 1, \varphi(j)_1 + 1] \times \dots \times [\varphi(j)_k - 1, \varphi(j)_k + 1] \times \left[-\frac{\varepsilon}{2^j}, \frac{\varepsilon}{2^j}\right]^{n-k}$$

$$\Rightarrow \mathcal{U} \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j^\varepsilon, \quad \mathrm{vol}(Q_j) \leq \varepsilon \cdot 2^k \frac{1}{2^{j-1}}$$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{vol}(Q_j) \leq \varepsilon \cdot 2^{k+1}$$