# 5 Übungen zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, den 17.11.2009

## 5.1

Induktionsanfang:

n=0:

$(1+x)^0 \geq 1 + 0x \Leftrightarrow 1 \geq 1$

$\Rightarrow$ Induktionsanfang erfüllt

Induktion:

Induktionsvorraussetzung: $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Beweis nun für n+1:

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x)$

$\geq (1+nx) \cdot (1+x) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (1+n)x + nx^2$

$\geq 1 + (n+1)x$

$\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

Damit ist die Bernoulli-Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bewiesen.

## 5.2

z.Z: $\forall a \in [0, \infty)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists q \in \{\frac{m}{n}\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{N}\}\ :\ |q - a| < \varepsilon$

Beweis:

Sei $a \in [0, \infty)$. Falls $a \in \{\frac{m}{n}\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$, so gilt: $\forall \varepsilon :\ |a - a| = 0 < \varepsilon$

Sei $a > 0$. Nach Archimedes $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{N} : \frac{k}{n}\sqrt{2} > a$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei nun $m(n) := max\{k \in \mathbb{N}_0 | \frac{k}{n}\sqrt{2} \geq a\}$.

Dann ist $\frac{m(n)}{n}\sqrt{2} \geq a < \frac{m(n)+1}{n}\sqrt{2}$, also $|a - \frac{m(n)}{n}\sqrt{2}| < \frac{1}{n}$.

Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Nach Archimedes existiert $n \in \mathbb{N} :\ n > \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Setze $q := \frac{m(n)}{n}\sqrt{2} \in \{\frac{m}{n}\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

Dann ist $(a - q) < \frac{1}{n} < \varepsilon$. q.e.d.

Da hier die Dichte einer Menge, die Bruchteile von $\sqrt{2}$, einer irrationalen Zahl, beinhaltet, in dem Intervall $[0, \infty)$ bewiesen wurde, gilt dieser Beweis analog auch für alle anderen irrationalen Zahlen. Da überdies der Beweis nicht direkt durch das einschränkende Intervall beeinträchtigt wurde, kann man das Intervall auch auf das von $\mathbb{R}$ ausdehnen, wodurch der Beweis auch für die Dichte der Menge der irrationalen Zahlen n $\mathbb{R}$ gilt.

## 5.3

$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!}$

$= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)(n-k-1)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k(k-1)!}$

$= \frac{(n-1)!k}{(n-k)(n-k-1)!k(k-1)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)(n-k-1)!k(k-1)!}$

$= \frac{(k+(n-k))(n-1)!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

## 5.4

Sei $a^n := 1000000^{1000000}$ und $(a+1)^{n-1} := 1000001^{999999}$.

Anwendung des Binomialsatzes:

$(a+0)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot 0^k$. Da $0^k$ nur 1 wenn k=0, sonst 0, lässt sich der Term vereinfachen: $\binom{n}{0} \cdot a^{n-0} \cdot 0^0 = a^n$

$(a+1)^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot (a)^{n-1-k} \cdot 1^k$. Da hier $1^k$ jeweils 1 ergibt, summieren sich jeweils $\binom{n-1}{k} a^{n-1-k}$. Da jedoch k=0 bloß $a^{n-1}$ ergibt, müsste sich für ein gleiches Ergebnis ein weiterer Faktor a ergeben, also dieses Ergebnis a mal summieren. Da die Potenz jedoch mit der Summe abnimmt und als Potenz stärker wirkt, als der durch den Binomialkoeffizienten bewirkte Faktor, ist $(a+1)^{n-1}$ für Zahlen in $\mathbb{N}$ zwangsläufig kleiner als $a^n$.

Damit ist $1000000^{1000000}$ größer als $1000001^{999999}$.

## 5.5

Anfangsbedingung:

n=1:

$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{a_{1,2}x_2}{a_{1,1}}$

Damit hat $x_1$ neben der trivialen Lösung $x_2 = x_1 = 0$ auch die Lösungsmenge $\{-\frac{a_{1,2}x_2}{a_{1,1}}\}$ als mögliche Lösung (Beispielsweise bei $x_2 = 1$ ist $x_1 = \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}$).

Induktion:

So wir für n+1 Variabeln n Gleichungen haben, lässt sich jede Gleichung jeweils nach einer anderen Variable umstellen. Für die erste würde das bedeuten: $a_{1,1}x_1 + ... + a_{1,n+1}x_{n+1} = 0 \Leftrightarrow a_{1,1}x_1 = -a_{1,2}x_2 - ... - a_{1,n+1}x_{n+1}$

Somit können wir jedes $x_i$ mit $i \in \mathbb{N}/\{0\}, 1 \leq i \leq n+1$ in Abhängigkeit der anderen $x_i$ darstellen. Somit ergibt sich durch mehrere Umformungen die so genannte Stufenform, in der die Anzahl der Unbekannten in jeder weiteren Gleichung abnimmt. Dies führt wiederum dazu, dass wir durch das Einsetzungsverfahren jedes $x_i$ mit $i \neq j$ in Abhängigkeit dieses einen $x_j$ mit $j \in \mathbb{N}/\{0\}, 1 \leq j \leq n+1$ darstellen können.

Dadurch ergibt das Gleichungssystem nur dann die triviale Lösung, wenn das entsprechend zu setzende $x_j$=0 gesetzt wird. Andernfalls hat das Gleichungssystem eine nicht-triviale Lösung. q.e.d

## 5.6

Zum Beweis der Äquivalenz ist zu zeigen, dass $(v_1, ..., v_{i-1}, w, v_{i+1}, ..., v_k)$ nur dann eine Basis von V ist, wenn in der Gleichung $w = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_i v_i + ... + \lambda_k v_k$ die Variable $\lambda_i \neq 0$ ist.

Ist $a \in V$, so ist $a = \varphi_1 a_1 + ... + \varphi_k a_k$ mit $\varphi_1, ..., \varphi_k \in K$.

Nun nehme man die Gleichung $w = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_i v_i + ... + \lambda_k v_k$ und forme sie nach $v_i$ um.

$\frac{w - \lambda_1 v_1 - ... - \lambda_k v_k}{\lambda_i} = v_i$ . Setzen wir dies in a ein, ergibt sich $v = \frac{\varphi_1}{\lambda_1} w + (\varphi_1 - \frac{\varphi_i}{\lambda_i}) v_1 + ... + (\varphi_{i-1} - \frac{\varphi_i}{\lambda_i}) v_{i-1} + ... + (\varphi_{i+1} - \frac{\varphi_i}{\lambda_i}) v_{i+1} + ... + (\varphi_k - \frac{\varphi_i}{\lambda_i}) v_k$

Damit ist $(v_1, ..., v_{i-1}, w, v_{i+1}, ..., v_k)$ ein Erzeugendensystem. Da hierfür jedoch etliche Elemente durch $\lambda_i$ geteilt werden müssen, ist es nur ein Erzeugendensystem bzw. Basis, wenn $\lambda_i \neq 0$.

Zum Beweis der linearen unabhängigkeit von $(v_1, ..., v_{i-1}, w, v_{i+1}, ..., v_k)$ setzen wir die lineare Unabhängigkeit von $(v_1, ..., v_k)$ vorraus:

Nun sei $\varphi_1 v_1 + ... + \varphi_{i-1} v_{i-1} + \varphi_i w + \varphi_{i+1} v_{i+1} + ... + \varphi_k v_k = 0$. Setzt man ein, $w = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k$, so ergibt sich die Gleichung $(\varphi_i \lambda_1 + \varphi_1) v_1 + ... + (\varphi_i \lambda_{i-1} + \varphi_{i-1}) v_{i-1} + \varphi_i \lambda_i v_i + (\varphi_i \lambda_{i+1} + \varphi_{i+1}) v_{i+1} + ... + (\varphi_i \lambda_k + \varphi_k) v_k = 0$. Durch unsere Vorraussetzung können wir hier vereinfachen auf $\varphi_i \lambda_i = \varphi_i \lambda_1 + \varphi_i = ... = 0$. Sofern wir vorraussetzen, dass $\lambda_i \neq 0$ ergibt sich die triviale Lösung $\varphi_i = \varphi_1 = ... = 0$. Somit ist $(v_1, ..., v_{i-1}, w, v_{i+1}, ..., v_k)$ linear unabhängig.

Damit wäre gezeigt, dass $(v_1, ..., v_{i-1}, w, v_{i+1}, ..., v_k)$ nur dann eine Basis von V ist, wenn $\lambda_i \neq 0$ in $w = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_i v_i + ... + \lambda_k v_k$.