

4 Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 11.5.2011

4.1 Aufgabe

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt für die triviale Fortsetzung $\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & , x \in U \\ 0 & , x \notin U \end{cases}$, dass

$\text{supp}(\tilde{f}) = U$ für $f(x) \neq 0$, also $\text{supp}(\tilde{f}) \subset U$ auch sonst.

Wählen wir nun f_j jeweils so, dass $\tilde{f}(x) = 0 \Leftrightarrow f_j(x) = 0$, gilt weiterhin $f_j \rightarrow \tilde{f}$ f.ü. und (f_j) FF. Damit gilt aber auch $\text{supp}(f_j) \subset \text{supp}(\tilde{f}) \subset U$.

4.2 Aufgabe

$$\int_{-n}^n e^{-x^2} dx \leq 2 \int_0^n e^{-x^2} dx \leq 2 \left(\underbrace{\int_0^1 e^{-x^2} dx}_{\leq 1} + \int_1^n e^{-x^2} dx \right) \leq 2 \left(1 + \int_1^n e^{-x} dx \right) \leq$$

$$2(1 + e^{-1} - e^{-n}) \leq e(1 + e^{-1})$$

Also beschränkt, damit $e^{-x^2} \in \mathcal{L}^1$, also Integrierbar.

$$\left(\int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \cdot \int_{-n}^n e^{-y^2} dy = \int_{-n}^n \int_{-n}^n e^{-(x^2+y^2)} = \int_{\pi}^0 \int_{-n}^n r e^{-r^2} dr d\varphi =$$

$$\int_{\pi}^0 \int_{-n}^n r e^{-r^2} dr d\varphi + \int_0^{\pi} \int_{-n}^n r e^{-r^2} dr d\varphi = \pi \cdot 2 \int_0^n \frac{r}{2r} e^{-z} dz = \pi(-e^{-n^2} + e^{-0}) \Rightarrow$$

$$\int_{-n}^n e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}(1 - e^{-n^2})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

4.3 Aufgabe

Es gilt: K und \tilde{K} kompakt, $\int_{K_y} dx = \int_{\tilde{K}_y} dx$

Das n -dim. Volumen oder Lebesgue-maß ist def. mit $\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_K$.

$$\mathbb{1}_K = \begin{cases} 1 & , x \in K \\ 0 & , x \notin K \end{cases} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_K = \int_K 1 \stackrel{\text{Vor.}}{=} \int_{\tilde{K}} 1 = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\tilde{K}}$$

4.4 Aufgabe

Das Volumen des Körpers lässt sich über das Integral über die Querschnittsfläche berechnen:

$$V = \int_a^b Q(z) dz$$

Dabei ist die Querschnittsfläche des Rotationskörpers immer eine Scheibe, also

$$V = \int_a^b \pi R^2(z) dz$$

Der Radius entspricht dabei $f(z)$, da jeweils $0 \leq x \leq f(z)$, also

$$V = \int_a^b \pi f^2(z) dz$$

Der Körper rotiert um z , also z -Komponente des Schwerpunktes (Weg ist Kreis um z -Achse) betrachten:

$$S_z = \frac{1}{2F} \int_a^b f^2(z) dz$$

Wir eliminieren nun die Integrale beider Gleichungen:

$$\frac{V}{\pi} = \int_a^b f^2(z) dz = \int_a^b f^2(z) dz = 2FS_z \quad \Rightarrow \quad \underbrace{2\pi S_z}_{\text{Weg d. SP.}} \cdot F = V$$

4.5 Aufgabe

Wie in 4 kann die Fläche dargestellt werden als Integral der Querschnitts-“Flächen“, hier durch das Rotieren von Kreise.

$$F = 2\pi \int_a^b f(z) \sqrt{1 + f'^2(z)} dz$$

Benötigt ist wieder die z -Komponente d. SP:

$$S_x = \frac{1}{L} \int_{\gamma} x ds = \frac{1}{L} \int_a^b f(z) \sqrt{1 + f'^2(z)} dz$$

Folgt nach Gleichsetzen der Integrale:

$$S_x L = \frac{F}{2} \pi \quad \Rightarrow \quad F = \underbrace{2\pi S_x}_{\text{Weg d. SP.}} \cdot L$$