

# 4 Übungsblatt von Informatik 3 zum Mittwoch, den 18.5.2011

## Aufgabe 1

Nach Skript gilt bereits  $A_q(n, d_0) \leq A_q(n-1, d_0-1)$   
 Also  $A_2(n, d_0) \geq A_2(n+1, d_0+1)$  ✓

2/5

Mit  $d_0$  ungerade gilt die Kugelpackungsschranke:  $d(n, d_0) \leq$

Sinnvoll:  $n \geq d_0 \Rightarrow d(n, d_0) \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^t \binom{n}{i}} \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^t \binom{d_0}{i}}$

Nach Skript:  $q^n \leq \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} \Rightarrow \sum_{i=0}^t \binom{d_0}{i} \geq q^{d_0} \Rightarrow \frac{1}{\sum_{i=0}^t \binom{d_0}{i}} \leq$

$\Rightarrow d(n, d_0) \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^t \binom{d_0}{i}} \leq q^{1-d_0+n}$

Also  $d(n, d_0) \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^t \binom{d_0}{i}} \leq q^{1-d_0-1+n+1} \leq A_q(n+1, d_0+1)$

Damit  $A_2(n, d_0) \leq A_2(n-1, d_0-1)$   
 $\Rightarrow A_2(n, d_0) = A_2(n-1, d_0-1)$   
 für  $d_0$  ungerade und  $n \geq d_0$

Sei  $C: [n, A_2(n, d_0), d_0, 2]$ -Code  
 Mit  $C': [n+1, A_2(n, d_0), d_0+1, 2]$   
 $C'$  ex.  $\Rightarrow A_2(n, d_0) = A_2(n+1, d_0+1)$

Sei  $c_1 c_2 c_3 c_4 \dots c_n$  in  $C$   
 $\Rightarrow c_1 c_2 c_3 c_4 \dots c_n c(n+1)$  in  $C'$   
 Dabei  $c(n+1)$  so, dass  
 $\text{Summe}(i=1 \rightarrow n+1) c_i = 2 \pmod 0$

Es gilt:  $|C| = |C'|$   
 1. Ist Abstand zweier Wörter aus  $C$   
 min  $d_0+1$ , so auch in  $C'$   
 2. Ist Abstand  $= d_0$ , so ist hat ein  
 Wort gerades, eines ungerades  
 Gewicht.  
 Damit ist das Prüfbit unterschiedlich  
 und so in  $C'$  Abstand  $d_0+1$

Also  $A_2(n, d_0) = A_2(n+1, d_0+1)$

## Aufgabe 2

a)  $M = q^{n+1-d_0} = 3^{4+1-3} = 9$  ✓

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$
0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	2	2	0	1	1	2	0

$rn = \frac{q-1}{q} n = \frac{3-1}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3} < 3 = d_0 \Rightarrow \frac{d_0}{d_0-rn} = \frac{3}{1/3} = 9 = M \Rightarrow \text{Optimal.}$  ✓

$d_0$  ungerade  $\Rightarrow \frac{q^n}{\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} (q-1)^i} = \frac{3^4}{\binom{4}{0} + \binom{4}{1} (3-1)} = 9 = M \Rightarrow \text{Perfekt.}$  ✓

b)  $M = q^{n+1-d_0} = 4^{4+1-3} = 16$  ✓

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$a_{15}$	$a_{16}$
0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
0	1	2	3	1	0	3	2	2	3	0	1	3	2	1	0
0	1	2	3	2	3	0	1	3	2	1	0	1	0	3	2

$rn = \frac{q-1}{q} n = \frac{4-1}{4} \cdot 4 = 3 < 3 = d_0 \Rightarrow \text{Nicht optimal}$  ✓

$d_0$  ungerade  $\Rightarrow \frac{q^n}{\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} (q-1)^i} = \frac{4^4}{\binom{4}{0} + \binom{4}{1} (4-1)} = 19.6923 \neq 9$

$\Rightarrow$  Nicht perfekt.

c) Nein:

$$M = 2^{5+1-3} = 8$$

Nach Konstruktion gemäß Singleton-Schranke, erstellen wir Codeworte der Länge 3 mit q Zeichen und M Worten:

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_18$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1

Man betrachte jetzt die 4 Wörter mit keiner oder einer 1:  $a_1, a_2, a_3, a_5$   
Diese unterscheiden sich nun alle um genau ein Zeichen,

$$\text{also } \forall i, j \in \{1, 2, 3, 5\} : d(x_i, x_j) = d_0|_{\{a_1, a_2, a_3, a_5\}} = 1$$

Damit für den ganzen Code  $d_0 = 3$  gilt, muss für die Worte bestehend aus a und 2 angefügten Zeichen  $d_0 = 3$ , also für die angefügten Zeichen  $d_0 = 2$  gelten.

Allerdings ist für 4 Wörter aus 2 Zeichen über ein Alphabet mit  $q=2$  das maximale  $d_0 = 1$  (verändert man 1 Wort, erhält man eines der

$$\text{anderen, dann also } d_0 = 0): \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Also scheitert das Erstellen eines solchen Codes bereits hier.

Auch möglich: Plotkin-Schranke:

$$rn = \frac{q-1}{q}n = \frac{5}{2} = 2.5 \not\geq q^{n+1-d_0} = 2^{5+1-3} = 8$$

Da Plotkin trotz Erfüllung d. Bedingung nicht obere Schranke, kann der Code nicht erstellt werden.

### Aufgabe 3

1 / 5

$$n_{m+1} = 2n_m:$$

Pro Iteration wird an jedes Wort aus  $R_m$  jeweils ein Wort aus  $R_m$  angehängt, um  $R_{m+1}$  zu generieren. Kein Wort wird anders Erstellt.

Da alle Wörter aus  $R_1$  die gleiche Länge haben (2), ergibt sich für alle Wörter der nachfolgenden  $R_m$  intern auch die gleiche Wortlänge:  $2n_{m-1}$

$$n(R_2) = 4, \quad n(R_3) = 8, \quad \text{etc.}$$

$$M_{m+1} = M_m^2:$$

Wir betrachten ein Wort aus  $R_m$ : um dieses Wort jeweils jedes Wort in  $R_m$

Per Definition von  $K$  muss dies mit  $\dots$  werden, allerdings ist jeweils die eine

der anderen:  $R_1 \ni \bar{a}\bar{a} = \bar{b}\bar{b} \in \mathbb{R}_1, R_2 \ni$

Somit entstehen pro Wort  $M_m$  neue W

$$d_0 = 1$$

$$\text{Es gilt } aa, ab \in K_1 \Rightarrow d_0(K_1) = 1$$

$$\Rightarrow aaaa, aaab \in K_2 \Rightarrow d_0(K_2) = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{aa}_{2^m}, \underbrace{aa\dots a}_{2^m-1}b \in K_m \Rightarrow d_0(K_m) = 1$$

$$n=2^m:$$

mit xx und x!x wird Wortlänge pro Schritt verdoppelt (von 2 an)

$$M=2^{(m+1)}:$$

Anzahl der Wörter wird von 4 an verdoppelt.

$$d_0=2^{(m-1)}:$$

Induktiv:  $m=1: d_0=1$

$m \rightarrow m+1:$

$$d(x!x, yy) = d(x, y) + d(!x, y) \geq 2^m * 2^{(m-1)} = 2^m$$

$$d(xx, yy) = 2d(x, y) \geq 2^m * 2^{(m-1)} = 2^m$$

$$d(xx, y!y) = d(x, y) + d(x, !y) \geq 2^m * 2^{(m-1)} = 2^m$$

$$d(x!x, y!y) = 2d(!x, !y) = 2d(x, y) \geq 2^m * 2^{(m-1)} = 2^m$$

$$\Rightarrow d_0(m \rightarrow m+1) = 2^m$$