Blatt 1 Numerik 2 29.4.13

Aufgabe 1

a) $y' + 2xy + x^3y^3 = 0$, $y(0) = 1$, $x \in [0; 1,5]$
$h = 0,3$

$x_0 = 0$, $x_1 = 0,3$, $x_2 = 0,6$, $x_3 = 0,9$, $x_4 = 1,2$, $x_5 = 1,5$

$y_0 = 1$, $y_1 = 1 + 0,3 \cdot (-2 \cdot 0 \cdot 1 - 0^3 \cdot 1^3) = 1$

$y_2 = 1 + 0,3(-2 \cdot 0,3 \cdot 1 - 0,3^3 \cdot 1^3) = 0,8119$

$y_3 = 0,8119 + 0,3(-2 \cdot 0,6 \cdot 0,8119 - 0,8119^3 \cdot 0,6^3)$
$\approx 0,48494$

$y_4 = 0,48494 + 0,3(-2 \cdot 0,9 \cdot 0,48494 - 0,9^3 \, 0,48494^3)$
$\approx 0,19813$

$y_5 = 0,19813 + 0,3(-2 \cdot 1,2 \cdot 0,19813 - 1,2^3 \cdot 0,19813^3)$
$= 0,05144$

$\left(y_6 = 0,05144 + 0,3(-2 \cdot 1,5 \cdot 0,05144 - 1,5^3 \cdot 0,05144^3) = 0,00501 \right)$

b) Euler: $y' = y$, $y(0) = \frac{3}{5}$, $y_{k+1} = y_k + h\overbrace{f(x_k, y_k)}^{y_k} = y_k(1+h)$

$y_1 = \frac{3}{5} + \frac{t^*}{n} \cdot \frac{3}{5}$, $y_2 = \frac{3}{5} + \frac{t^*}{n} \cdot \frac{3}{5} + \frac{t^*}{n} \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{t^*}{n} \cdot \frac{3}{5}\right)$

$= \frac{3}{5}\left(1 + \frac{t^*}{n}\right)$ $\qquad = \frac{3}{5}\left(1 + \frac{t^*}{n}\right)\left(1 + \frac{t^*}{n}\right)$

$\Rightarrow y_k = \frac{3}{5}\left(1 + \frac{t^*}{n}\right)^k$

$\exp(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \Rightarrow$

$y_n \xrightarrow{n \to \infty} \frac{3}{5} \exp(t^*)$