5 Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 18.5.2011

5.1 Aufgabe

Sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Folge in Λ die gegen λ^* konvergiert.
Nach Voraussetzung 1 ($\forall x \in \mathbb{R} : f(x,*)$ stetig bei λ^*) konvertiert die Folge $(f_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ mit $f_j(x) = f(u_j)x$ und damit auch $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ pkt.weise gegen $f(*,\lambda^*)$
Mit Bedingung 3 gilt mit Satz von der majorisierten Konvergenz:
$\lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,u_j)dx = \lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_j(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,\lambda^*)dx$
Also nach Folgenkriterium für die Stetigkeit $\Rightarrow$ stetig bei λ^*

5.2 Aufgabe

Sei $p(\gamma) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,\gamma)dx$
der Differenzenquotient von p ist

$$\frac{p(s)-p(\lambda)}{s-\lambda} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(x,s)dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x,\lambda)dx}{s-\lambda}$$

Sei nun $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$, mit $u_j \neq \lambda$ eine Folge, die gegen t konvergiert.
Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein a mit $|\frac{f(x,u_j)-f(x,\lambda)}{u_j-\lambda}| = |\partial_2 f(x,a)| \leq g(x)$
da g integrierbar, ist auch der der Diffquot. integrierbar.
Wieder nach Satz der maj. konvergenz:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}p(\lambda) = \lim_{j\to\infty} \frac{p(u_j)-p(\lambda)}{u_j-\lambda} = \lim_{j\to\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(x,u_j)dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x,\lambda)dx}{u_j-\lambda}$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x,u_j)-f(x,\lambda)}{u_j-\lambda}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j\to\infty} \frac{f(x,u_j)-f(x,\lambda)}{u_j-\lambda}dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_2 f(x,\lambda)dx$$

Mit stetiger Abh. des Integrals v. Parameter folgt stetige differenzierbarkeit.

5.3 Aufgabe

a) $\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})$
$\frac{x-y}{\sqrt{4t}} \to z \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{\sqrt{4t}}{-1}$
$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} exp(-\frac{(x-y)^2}{4t}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int\limits_{\infty}^{-\infty} (-\sqrt{4t})exp(-z^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1$

b)

5.4 Aufgabe

Sei $g(x) = \begin{cases} 1 & ,|x| < a \\ 0 & ,|x| \geq a \end{cases}$ Funktion auf kp. Träger $[-a, a]$.

Es gilt: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x)dx \stackrel{!}{=} g(0) = 1$

Regulär dann:

$|\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x)dx| = |\int\limits_{-a}^{a} g(x)\delta(x)dx| \leq ||g(x)||_\infty \int\limits_{-a}^{a} |\delta(x)|dx < g(0)$

$\int\limits_{-a}^{a} |\delta(x)|dx$ wird kleiner 1, da $\delta(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Also Widerspruch.

5.5 Aufgabe

$\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1} f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{1} (\int\limits_{0}^{y} -\frac{1}{y^2}dx + \int\limits_{y}^{1} \frac{1}{x^2}dx)dy$

$= \int\limits_{0}^{1} ([-\frac{1}{y^2}x]_0^y + [-\frac{1}{x}]_y^1)dy = \int\limits_{0}^{1} ((-\frac{1}{y} - 0) + (-1 - \frac{1}{y}))dy = \int\limits_{0}^{1} -\frac{2}{y} - 1dy$

$= [-y - 2Log[y]]_0^1 \to -\infty$

$\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1} f(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{1} (\int\limits_{0}^{x} \frac{1}{x^2}dy + \int\limits_{x}^{1} -\frac{1}{y^2}dy)dx$

$= \int\limits_{0}^{1} ((\frac{1}{x} - 0) + (1 - \frac{1}{x}))dx = \int\limits_{0}^{1} 1dx = 1$