5 Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 18.5.2011

Aufabe 1

$U \subset \mathbb{R}^p,\ f: \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R},\quad \lambda^* \in U$

1) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ gilt $f(x,*)$ ist stetig bei λ^*
2) $\forall \lambda \in U$ gilt $f(*,\lambda) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$
3) $\exists g \in \mathcal{L}^1$ mit $\forall \lambda \in U : |f(*,\lambda)| \leq g$

Z.z.: $\Rightarrow F: U \to \mathbb{R},\quad F(\lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}} f(x,\lambda)dx$ ist stetig in λ^*

Sei $\lambda_n \to \lambda^*, (\lambda_n) \subset U$. Z.z. $F(\lambda_n) \to F(\lambda^*)$
Sei $g_n := f(*,\lambda_n)$
Nach 2) ist $(g_n) \in \mathcal{L}^1$. Mit 1) gilt $g_n(x) = f(x,\lambda_n) \to f(x,\lambda^*) =: h(x)$
Und mit 3) ist $|g_n| = |f(*,\lambda_n)| \leq g \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Mit dem Satz von Lebesgue gilt: $h \in \mathcal{L}^1$ und $\int g_n \to \int h$
$\Rightarrow F(\lambda_n) \to \int f(*,\lambda^*) = F(\lambda^*)$

Aufabe 2

Seien $U \subset \mathbb{R}$ offen, $f: \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ mit

a) $\partial_2 f$ ex. auf $\mathbb{R}^n \times U$
b) $\forall \lambda \in U$ gilt $f(*,\lambda) \in \mathcal{L}^1$
c) $\exists g \in \mathcal{L}^1$ so dass $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times U$ gilt $|\partial_2 f(*,\lambda)| \leq g$

Z.z. $\Rightarrow U \to \mathbb{R},\quad F(\lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dx$ diffbar in U,

mit $F'(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_2 f(x,\lambda)dx$

Sei $\lambda \in U$. $I \subset \mathbb{R}$, so dass $\lambda + h \in U \quad \forall h \in I$

$$G: I \to \mathbb{R},\quad G(h) := \begin{cases} \frac{1}{h}(f(x,\lambda+h) - f(x,h)) & ,h \neq 0 \\ \partial_2 f(x,\lambda)dx & ,h = 0 \end{cases}$$

$G \to f$ aus Aufgabe 1
Bleibt z.z. 1)-3) gilt für G.

Aufabe 3

$t > 0,\ x,y,\in \mathbb{R}.\ \ p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} exp(-\frac{(x-y)^2}{4t})$

a) $t > 0, x \in \mathbb{R},\quad \int\limits_{\mathbb{R}} p(t,x,y)dy = 1$ (Substitution $\frac{x-y}{\sqrt{4t}} = z$)

b) $u_0 \in \mathcal{L}^1,\quad u(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}} p(t,x,y)u_0(y)dy$
   $u_{xx}(t,x) = u_t(t,x) \quad \forall t > 0,\ x \in \mathbb{R}$
   Zu überprüfen sind a)-c) aus Aufgabe 2 für $x \in \mathbb{R}$ fest
   $t \mapsto p(t,x,y)u_0(y) \quad (f(t,y) = p(t,x,y)u_0(\lambda))$

a) $\partial_t f:$

$\partial_t p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t^3}})e^{\cdots} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\cdots}\cdot(-\frac{(x-y)^2}{4t^2}(-1))$

$= p(t,x,y)(\frac{(x-y)^2}{4t^2} - \frac{1}{2t})$

$\partial_t f(t,y) = p(t,x,y)(\frac{(x-y)^2}{4t^2} - \frac{1}{2t})\cdot u_0(y) \Rightarrow$ a erfüllt

b) $f(t,*) = \underbrace{p(t,x,y)}_{mbar}\underbrace{u_0}_{\in\mathcal{L}^1} \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f(t,*)$ mbar

$$|f(t,*)| \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}}_{konst}\cdot 1\cdot \underbrace{|u_0|}_{\in\mathcal{L}^1} \in \mathcal{L}^1$$

$\Rightarrow$ b erfüllt

c) $$|\partial_t f(t,y)| = \underbrace{|p(x,y,t)|}_{\sim e^{-y^2}}\underbrace{(\frac{(x-y)^2}{4t^2} + \frac{1}{2t})}_{\sim y}|u_0(y)| \leq c(t,x)\underbrace{|u_0(y)|}_{\in\mathcal{L}^1} \in \mathcal{L}^1$$

$\Rightarrow c$ erfüllt

$\Rightarrow \exists \partial_t u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \partial_t p(x,y,t)u_0(y)dy$

Genauso sieht man: $\exists \partial_x U(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \partial_x p(t,x,y)u_0(y)dy$

Wieder so: $\exists \partial_x\partial_x u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \partial_x\partial_x p(t,x,y)u_0(y)dy$

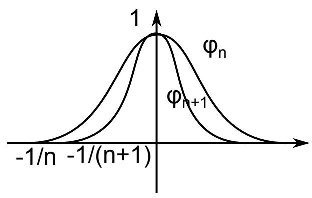
$\partial_x p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\cdots}(-\frac{2(x-y)}{4t})$

$\partial_x\partial_x p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\cdots}(-\frac{2(x-y)}{4t})^2 + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{\cdots}(-\frac{2}{4t})$

$= p(t,x,y)(\frac{(x-y)^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}) = \partial_t p(t,x,y)$

$\Rightarrow \partial_t u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{\partial_t p(t,x,y)}_{\partial_x\partial_x p(t,x,y)} u_0(y)dy = \partial_x\partial_x u(t,x)$

Aufabe 4



$\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

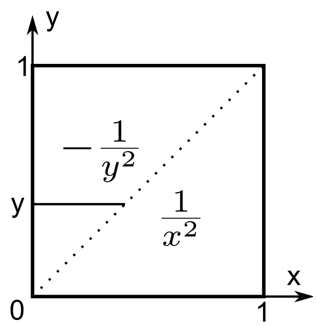
$1 = \varphi_n(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\delta(x)dx$

$0 \leq \varphi_n \leq 1,\quad \varphi_n(0) = 1,\quad \varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}(\varphi_n\cdot\delta)(x) \to 0pw.$

$|\varphi_n\delta| \leq |\delta| \in \mathcal{L}^1$

$\Rightarrow$ Lebesgue $\Rightarrow 0 = \int 0 \leftarrow \varphi_n\delta = \varphi_n(0) = 1$ (Widerspruch)

Aufabe 5



$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad f(x,y) = \begin{cases} -\frac{1}{y^2} & ,0<x<y<1 \\ \frac{1}{x^2} & ,0<y<x<1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy \overset{?}{=} \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)dydx$

$\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1(\int\limits_0^y -\frac{1}{y^2}dx + \int\limits_y^1 \frac{1}{x^2}dx)dy = \int\limits_0^1(-1)dy = -1$

$\int\limits_0^y -\frac{1}{y^2}dx + \int\limits_y^1 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{y} + [-\frac{1}{x}]_y^1 = -\frac{1}{y} + (-1) + \frac{1}{y} = -1$

$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = \int_0^x \frac{1}{x^2}dy + \int_x^1 -\frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{x} + [\frac{1}{y}]_x^1 = \frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x} = 1$

$\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy)dx = \int_0^1 1dx = 1 \neq -1 = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx)dy$

Ungleich da $f \notin \mathcal{L}^1$:

$f \in \mathcal{L}^1 \;\Rightarrow\; |f| \in \mathcal{L}^1 \;\Rightarrow\; \infty > \int_0^1 \frac{1}{x}dx$ (Widerspruch!)

Tipps für Blatt 6

Aufgabe 1/3

$\int_{0\leq f} f < \infty, \quad \int f^2 = \infty$

$f = \frac{1}{\sqrt{*}}\mathbb{1}_{(0,1]} \overset{!}{\in} \mathcal{L}^+$

Aufgabe 2

EDIT: „total abwesend“ $\Rightarrow$ ungültiger Tipp $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1, \quad \tilde{f} \neq 0, \; \tilde{f}(x) = 0 \quad (x < 0)$

$f = \tilde{f} + \tilde{f}(-,*)$

$\tilde{f}_n \in \mathcal{L}^+, \quad \tilde{f}_n \leq \tilde{f}_{n+1}, \quad \tilde{f}_n \to \tilde{f} \quad pw.$

$f_n(x) = \begin{cases} \tilde{f}_{n/2}(x) & , n\ gerade \\ \tilde{f}_{\frac{n-1}{2}}(x) & , n\ ungerade \end{cases}$

$\Rightarrow ||f_n - f||_1 \not\to 0$

Aufgabe 4

a) M offen testen

b) $M_j = [0, \frac{1}{n}] \times \mathbb{R}$ testen