

5 Übungsblatt von Informatik 3 zum Mittwoch, den 25.5.2011

Aufgabe 1

- a) $A_q(n, 2) \leq qA_q(n, 1) = \frac{1}{q}q^n = q^{n-1}$
 $A_q(n, 1) \geq q^{n+1-2} = q^{n-1}$
- b) $A_q(n, n) \geq q^{n+1-n} = q$
 Jedes Wort in $A_q(n, n)$ muss sich von jedem anderen Wort an allen Stellen unterscheiden. da nur q verschiedene Zeichen, gibt es maximal q Wörter.
 $\Rightarrow A_q(n, n) \leq q$

Aufgabe 2

- a) Kugelpackungsschranke: $A_q(n, d_0) \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} (q-1)^i} = \frac{2^{18}}{\sum_{i=0}^3 \binom{18}{i}} = 265 \geq 2^8 = 256$
 In der Kugelpackungsschranke mit Kugeln erfassbare Worte: $M \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} (q-1)^i$
 Alle Wörter: $q^n \Rightarrow q^n - M \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} (q-1)^i$: alle Wörter außerhalb von Kugeln.
 $q^n - M \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} (q-1)^i = 2^{18} - 2^8 \sum_{i=0}^3 \binom{18}{i} = 9216 = \frac{3.51563\%}{q^{18}}$
- b) 1) $A_q(n, d_0) \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} (q-1)^i} = \frac{2^{18}}{\sum_{i=0}^4 \binom{18}{i}} = 64.76 \not\geq 256$
 \Rightarrow Code existiert nicht!
- 2) $A_q(n, d_0) \leq \frac{q^n}{\sum_{i=0}^t \binom{n}{i} (q-1)^i} = \frac{3^{27}}{\sum_{i=0}^3 \binom{27}{i} 2^i} = 3.06754 * 10^8 \geq 2^{12} = 4096$
 \Rightarrow Code kann existieren!

Aufgabe 3

- a) Kapazität $C = 1 + p_0 \log_2(p_0) + (1 - p_0) \log_2(1 - p_0)$
 Für $p_0 = 0$ ist $C = 1 + 0 \cdot \log(0) + 1 \cdot \log(1) = 1$ und maximal.
 Für $p_0 = 0.5$ ist $C = 1 + 0.5 \cdot \frac{1}{2} + 0.5 \cdot \frac{1}{2} = 0$ und minimal.
 Für $p_0 = 1$ ist $C = 1 + 1 \cdot \log(1) + 0 \cdot \log(0) = 1$ und maximal.
 Werte außerhalb $[0, 1]$ stellen keine gültigen Wahrscheinlichkeiten zur Übertragung eines Wortes dar.
 Somit $C \in [0, 1]$
- b) Nach Skript für $n = 2N + 1, k = 1$:

$$P_{rest} = \sum_{i=0}^N \binom{2N+1}{i} (1-p_0)^i p_0^{2N+1-i}$$

$$= \sum_{i=0}^N \binom{2N+1}{i} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{2N+1-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{i} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{n-i} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{i} \cdot \frac{2^i}{3^n} = \frac{n!}{3^n} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{2^i}{(n-i)!i!}$$

$$\approx \frac{n!}{3^n} \cdot \frac{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}{(n-\lfloor n/2 \rfloor)! \lfloor n/2 \rfloor!} = \frac{n!}{3^n} \cdot \frac{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}{\lfloor n/2 \rfloor! \lfloor n/2 \rfloor!} = \frac{n!}{3^n} \cdot \frac{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}{(\lfloor n/2 \rfloor!)^2 \cdot \lfloor n/2 \rfloor}$$