Numerik 2 Blatt 2 Julian Bergmann
ÜB 10^{00}

Aufgabe 1

$$x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t) y(t) \qquad x(0) = 20$$
$$y'(t) = \delta x(t) y(t) - \gamma y(t) \qquad y(0) = 2$$

$\alpha = 0{,}1$, $\beta = 0{,}2$, $\delta = \gamma = 0{,}4$ $\qquad h = 0{,}1$

$t_0; t_1; \dots; t_{10} = 0; 0{,}1; \dots; 1{,}0$

$x_0 = 20$,

$x_1 = 20 + 0{,}1 \cdot (\alpha \cdot 20 - \beta \cdot 20 \cdot y_0) = 20 + 0{,}1(0{,}1 \cdot 20 - 0{,}2 \cdot 20 \cdot 2)$
$= 19{,}4$

$y_0 = 2$

$y_1 = 2 + 0{,}1(0{,}4 \cdot 20 \cdot 2 - 0{,}4 \cdot 2) = 3{,}52$

$x_2 = 19{,}4 + 0{,}1 \cdot (0{,}1 \cdot 19{,}4 - 0{,}2 \cdot 19{,}4 \cdot 3{,}52) = 18{,}23$

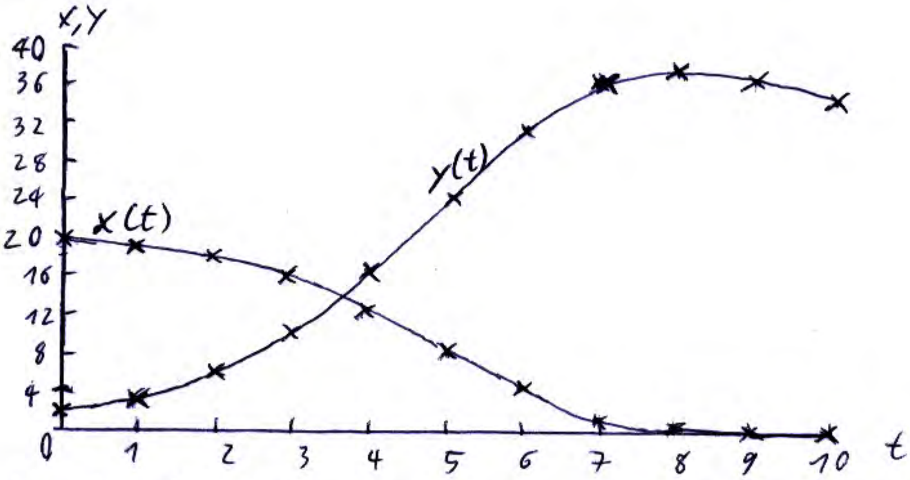
$y_2 = 3{,}52 + 0{,}1(0{,}4 \cdot 19{,}4 \cdot 3{,}52 - 0{,}4 \cdot 3{,}52) = 6{,}11$

$x_3 = 16{,}18$, $y_3 = 10{,}32$, $x_4 = 13{,}00$, $y_4 = 16{,}59$

$x_5 = 8{,}82$, $y_5 = 24{,}56$; $x_6 = 4{,}58$, $y_6 = 32{,}24$

$x_7 = 1{,}67$, $y_7 = 36{,}85$, $x_8 = 0{,}46$, $y_8 = 37{,}84$

$x_9 = 0{,}12$ $y_9 = 37{,}01$, $x_{10} = 0{,}03$, $y_{10} = 35{,}71$



Durch die Kopplung der 2 DGLs ist die jeweilige Steigung der Funktionen stark abhängig vom Wert der jeweils anderen.
Betrachten wir y(t) als Anzahl der Füchse, so haben sie zu t=0 genug Nahrung (Hasen x(t)) und vermehren sich dadurch exponentiell. Dabei sinkt die Anzahl der Hasen, wodurch weniger Futter vorhanden ist, was das Wachstum der Anzahl und schließlich auch die Anzahl der Füchse selbst vermindert.

Numerik 2 Blatt 2 Julian Bergmann

MSc Physik UB 1000

Aufgabe 2

$y' = y(1-y)$, $y(0) = 0{,}5$, $h = 0{,}2$, $x_0 = 0$

$x_{k+1} = x_k + h$: $x_0, x_1, \dots, x_5 = 0, \dots, 1$, $f(x,y) = y(1-y)$

$k_1 = f(x_k, y_k)$

$k_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_1)$

$k_3 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} k_2)$

$k_4 = f(x_k + h, y_k + k_3)$, $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$y_0 = 0{,}5$,

$k_1 = 0{,}5(1-0{,}5) = 0{,}25$

$k_2 = (\underbrace{0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}25}_{0{,}525})(1 - 0{,}525) = 0{,}2494$

$k_3 = (\underbrace{0{,}5 + 0{,}1 \cdot 0{,}2494}_{0{,}5249})(1 - 0{,}5249) = 0{,}2494$

$k_4 = (\underbrace{0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}2494}_{0{,}5499})(1 - 0{,}5499) = 0{,}2475$

$y_1 = 0{,}5 + \frac{0{,}2}{6}(0{,}25 + 2 \cdot 0{,}2494 + 2 \cdot 0{,}2494 + 0{,}2475) = 0{,}5498$

$k_1 = 0{,}2475$, $k_2 = 0{,}2444$, $k_3 = 0{,}2445$, $k_4 = 0{,}2403$

$y_2 = 0{,}5987$

$k_1 = 0{,}2403$, $k_2 = 0{,}2349$, $k_3 = 0{,}2351$, $k_4 = 0{,}2288$

$y_3 = 0{,}6457$

$k_1 = 0{,}2288$, $k_2 = 0{,}2216$, $k_3 = 0{,}2218$, $k_4 = 0{,}2139$

$y_4 = 0{,}69$

$k_1 = 0{,}2139$, $k_2 = 0{,}2053$, $k_3 = 0{,}2057$, $k_4 = 0{,}1966$

$y_5 = 0{,}7311$

Numerik 2 Blatt 2 Julian Bergmann
MSc Physik UB 10^{00}

Aufgabe 3

a) $\tau(x,y(x),h) = \frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \varphi(x,y,h)$

$$\varphi(x,y,h) = \sum_{j=1}^{s} b_j k_j = \sum_{j=1}^{s} b_j f(x+c_j h,\ y+h\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} k_i)$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \sum_{j=1}^{s} b_j \Big(f(x,y) + c_j h f_x(x,y) + h\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} k_i f_y(x,y) + O(h^2)\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} b_j \Big(f(x,y) + c_j h f_x(x,y) + h\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} f_y(x,y) f(x+c_i h, y+h\sum_{l=1}^{i-1} a_{il} k_l) + O(h^2)\Big)$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \sum_{j=1}^{s} b_j \Big(f(x,y) + c_j h f_x(x,y) + h\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} f_y(x,y)\Big(f(x,y) + f_x(x,y) c_i \underbrace{h}_{\to O(h^2)} + \underbrace{h\sum_{l=1}^{i-1} a_{il} k_l f_y(x,y)}_{\to O(h^2)} + O(h^2)\Big)\Big)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} b_j \Big(f(x,y) + c_j h f_x(x,y) + h\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} f_y(x,y) f(x,y)\Big) + O(h^2)$$

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \overset{\text{Taylor}}{=} \frac{y(x) + h y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + O(h^3) - y(x)}{h} = y'(x) - \frac{h}{2} y''(x) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \tau(x,y(x),h) = y'(x) - \frac{h}{2} y''(x) + O(h^2) - \sum_{j=1}^{s} b_j \Big(f(x,y) + c_j h f_x(x,y) + h\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} f_y(x,y) f(x,y)\Big) + O(h^2)$$

$$= f(x,y) - \frac{h}{2}\Big(f_x(x,y) + f_y(x,y) f(x,y)\Big) - \sum_{j=1}^{s} b_j \Big(f(x,y) + c_j h f_x(x,y) + h\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} f_y(x,y) f(x,y)\Big) + O(h^2)$$

$$= f(x,y)\Big(1 - \sum_{j=1}^{s} b_j\Big) + h f_x(x,y)\Big(\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{s} b_j c_j\Big) + h f_y(x,y) f(x,y)\Big(\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{j-1} b_j a_{ji}\Big) + O(h^2)$$

$\Rightarrow$ Ordnung 2 $(O(h^2))$, wenn (*) $\left(1 - \sum_{j=1}^{s} b_j\right) = 0$,
(**) $\left(\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{s} b_j c_j\right) = 0$ und (***) $\left(\frac{1}{2} - \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{j-1} b_j a_{ji}\right) = 0$

* : $\sum_{j=1}^{s} b_j = 1$ gegeben

** $\wedge$ *** : $\sum_{j=1}^{s} b_j c_j = \sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} = \frac{1}{2}$ notwendig $\Rightarrow$ q.e.d.

($\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} = \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} + \sum_{i=j}^{s} a_{ji}$, da $a_{ji} = 0$ f. $i > j-1$ $\Rightarrow \sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{i=1}^{s} a_{ji} = \frac{1}{2}$)

$\Rightarrow$

b) Nun notwendig Terme $\sim h^3 + O(h^4)$

$$y(x+h) \overset{\text{Taylor}}{=} \underbrace{y(x) + h y'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x)}_{\text{Bereits durch a) erfüllt}} + \frac{h^3}{6} y'''(x) + O(h^4)$$

↳ zu betrachten f. 3. Ordnung.

$$\frac{h^3}{6} y'''(x) = \frac{h^3}{6}\left(f_x(x,y) + f_y(x,y) f(x,y)\right)'$$
$$= \frac{h^3}{6}\Big(f_{xx}(x,y) + 2 f_{xy}(x,y) f(x,y) + f_{yy}(x,y) f^2(x,y) + f_x(x,y) f_y(x,y) + f_y^2(x,y) f(x,y)\Big)$$

Betrachte nun mit "Taylor" gekennzeichnete Schritte aus a) mit einer weiteren Ordnung:

$$\varphi(x,y,h) = \sum_{j=1}^{5} b_j f\Big(x + c_j h,\ y + h \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} k_i\Big)$$
$$\overset{\text{Taylor}}{=} \sum_{j=1}^{5} b_j \Big(\underbrace{f(x,y) + c_j h f_x(x,y) + h \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} k_i f_y(x,y)}_{\text{Bereits durch a) erfüllt}}$$

zur Betrachtg. bei Ordnung 3, $=: \varphi^*$
$$\left. + \frac{(c_j h)^2}{2} f_{xx}(x,y) + \frac{c_j h^2}{2} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} k_i f_{xy}(x,y) + \frac{1}{2}\Big(h \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} k_i\Big)^2 f_{yy}(x,y) \Big) + O(h^3) \right.$$

Unter Berücksichtigung von a) fallen nun Terme niedrigerer Ordnung weg, sodass τ nur folgende Terme umfasst.

$$\tau(x, y(x), h) = \frac{h^3}{6} y'''(x) + O(h^4) - \varphi^*(x,y,h)$$
$$= \frac{h^3}{6h}\Big(f_{xx}(x,y) + 2 f_{xy}(x,y) f(x,y) + f_{yy}(x,y) f^2(x,y) + f_x(x,y) f_y(x,y) + f_y^2(x,y) f(x,y)\Big)$$
$$+ \frac{O(h^4)}{h} - \sum_{j=1}^{5} b_j \Big(\frac{(c_j h)^2}{2} f_{xx}(x,y) + \frac{c_j h^2}{2} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} k_i f_{xy}(x,y)$$
$$+ \frac{1}{2}\Big(h \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} k_i\Big)^2 f_{yy}(x,y) \Big) + O(h^3)$$
$$\overset{\text{Taylor}}{=} h^2 f_{xx}(x,y)\Big(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{5} b_j c_j^2\Big)^{*} + h^2 f_{xy}(x,y) f(x,y)\Big(\frac{1}{3} - \sum_{j=1}^{5} b_j c_j \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji}\Big)^{*2}$$
$$+ h^2 f_{yy}(x,y) f^2(x,y)\Big(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{5} b_j \Big(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji}\Big)^2\Big)^{*3} + h^2 f_x(x,y) f_y(x,y)\Big(\frac{1}{6}$$
$$- \sum_{j=1}^{5} b_j \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} c_i\Big)^{*4} + h^2 f_y^2(x,y) f(x,y)\Big(\frac{1}{6} - \sum_{j=1}^{5} b_j \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} \sum_{l=1}^{i-1} a_{il}\Big)^{*5} + O(h^3)$$

$*$: $\sum_{j=1}^{5} b_j c_j^2 = \frac{1}{3}$, damit $* = 0$. $\quad *^2$: $\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} = c_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{5} b_j c_j^2 = \frac{1}{3}$, damit $*^2 = 0$.

$*^3$: $\Big(\sum_{i=1}^{j-1} a_{ji}\Big)^2 = c_j^2 \Rightarrow \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{5} b_j c_j^2 = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{5} b_j c_j^2 = \frac{1}{3}$, damit $*^3 = 0$.

$*^4$: $\sum_{j=1}^{5} b_j \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} c_i = \frac{1}{6}$, damit $*^4 = 0$, $*^5$: $\sum_{l=1}^{i-1} a_{il} = c_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{5} b_j \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} c_i = \frac{1}{6} \Rightarrow *^5 = 0$

$\Rightarrow$ aus $*$ und $*^4$ folgt Forderung aus Aufgabenstellung, $* \Rightarrow *^2, *^3$, $*^4 \Rightarrow *^5$.
Auch hier wieder: $\sum_{i=1}^{j-1} a_{ij} = \sum_{i=1}^{5} a_{ij}$, da $a_{ij} = 0$ für $i > j-1$!