JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Lehrstuhl für Numerische Mathematik
Prof. Dr. E. Berdysheva
Dipl.-Phys. Daniel Schäfer

Numerik II im Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + 2xy + x^3y^3 = 0, \quad y(0) = 1$$

auf dem Intervall $0 \leq x \leq 1.5$ näherungsweise für $h = 0.3$ mit dem Eulerschen Polygonzugverfahren. Zeichnen Sie den Verlauf der Näherungslösung.

(b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = y, \quad y(0) = \frac{3}{5}$$

sowie äquidistante Punkte t_i mit $i = 0, \ldots, n$ auf dem Intervall $[0, t^*]$ für $t^* > 0$. Zeigen Sie durch direkte Rechnung, dass die mit dem Eulerverfahren erzielte Näherung $y(t^*)$ für $n \to \infty$ gegen den Wert $\frac{3}{5} \exp\{t^*\}$ konvergiert.

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Bestimmen Sie den relativen Fehler des Näherungswertes für $y(1.5)$ aus Aufgabe 1(a) bezogen auf den Wert der exakten Lösung. Zur Bestimmung der exakten Lösungen verwenden Sie die Substitution $u = y^{-2}$.

($\star$) **Aufgabe 3** (10 Punkte)

(a) Leiten Sie aus dem Rückwärtsquotienten $\frac{y(x)-y(x-h)}{h}$ eine Variante des Eulerschen Polygonzugverfahrens her.

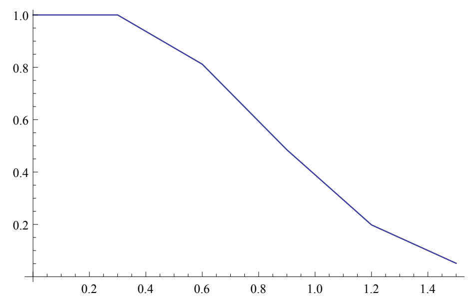
(b) Bestimmen Sie die Konsistenzordnung dieses Verfahrens.

Abgabe: Dienstag, 30.04.2013, bis 12:00 Uhr in/vor Raum 149 HRZ oder in der Vorlesung.
($\star$) – Studenten/innen BSc Physik sowie Lehramtstudenten/innen müssen diese Aufgabe nicht bearbeiten.

1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 1 8.5.12

1.1 Aufgabe

a) $y' = -x^3y^3 - 2xy$
$y(0) = 1 \quad , \quad h = 0.3$
$x_0 = 0$
$x_1 = x_0 + h = 0.3$
$x_2 = x_0 + 2h = 0.6$
$x_3 = x_0 + 3h = 0.9$
$x_4 = x_0 + 4h = 1.2$
$x_5 = x_0 + 5h = 1.5$
$y_0 = 1$
$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) = 1$
$y_2 = y_1 + 0.3f(x_1, y_1) = 0.8119$
$y_3 = y_2 + 0.3f(x_2, y_2) = 0.484936$
$y_4 = y_3 + 0.3f(x_3, y_3) = 0.19813$
$y_5 = y_4 + 0.3f(x_4, y_4) = 0.05144$



b) $y' = y$
$y(0) = \frac{3}{4}$ mit $h = \frac{t^*}{n}$
$y_0 = \frac{3}{4}$
$y_1 = y_0 + hy_0 = y_0(1 + h)$
$y_2 = y_1 + hy_1 = y_0(1 + h) + hy_0(1 + h) = y_0(1 + h)(1 + h)$
$y_3 = y_0(1 + h)^3$
$y_n = y_0(1 + h)^n$
Setze $h = \frac{t^*}{n}$ ein: $y_n = y_0(1 + \frac{t^*}{n})^n = \frac{3}{5}(1 + \frac{t^*}{n})^n$
Nach Analysis folgt: $\lim(1 + \frac{t^*}{n})^n = e^{t^*}$
Behauptung folgt.

1.2 Aufgabe

$y' + 2xy + x^3y^3 = 0$
Sub. mit $u = y^{-2}$
$u = y^{-2} \quad \Rightarrow \quad uy^3 = y$
$u' = -2y^{-3}y' \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}u'y^3 = y'$
$\Rightarrow u' - 4ux - 2x^3 = 0$
homogene Lösung:
$u' - 4ux = 0 \quad \Leftrightarrow u = e^{2x^2+c}$
inhomogene Lösung:
Ansatz: $u = ax^2 + bx + c$
$\Rightarrow$ Koeffizienten–Vergleich
$a = -\frac{1}{2} \; , \quad b = 0 \; , \quad c = -\frac{1}{4}$
$\Rightarrow u = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} + e^{2x+c}$

$u(0) = 1 \quad \Rightarrow c = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{-2x^2-1+5e^{2x^2}}}$
exakter Wert: $y(1.5) = 0.0948533$
rel Fehler:
$\partial y(x) = \left|\frac{\tilde{y}(x)-y(x)}{y(x)}\right| = 0.458$

1.3 Aufgabe

a) $\frac{y(x)-y(x-h)}{h} = \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$
$\frac{y(x)-y(x-h)}{h} \approx y'(x) = f(x,y)$
implizites Eulerverfahren, Anfangspunkt ist der rückwärts genommene Diff.quotient an der Stelle x+h
$y'(x+h) = \frac{y(x+h)-y(x)}{h} + O(h)$
mit $y'(x+h) = f(x+h, y(x+h))$
$\Rightarrow Y(x+h) = y(x) + hf(x+h, y(x+h)) + O(h^2)$
y(x+h) ist auf beiden Seiten
$\Rightarrow \eta_{i+1} = \eta_i + hf(x_{i+1}, \eta_{i+1})$
um eine Näherungslösung zu erhalten.

b) $y'(x) = \frac{y(x)-y(x-h)}{h} \overset{Taylor}{\Longrightarrow} y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - O(h^2)$
$\tau(x, y(x), h) = \frac{y(x)-y(x-h)}{h} - y'(x)$
$= \frac{hy'(x)-\frac{h^2}{2}y''(x)+O(h^2)}{h}$
$= y'(x) - \frac{h}{2}y''(x) + O(h^2) - y'(x)$
$= -\frac{h}{2}y''(x) + O(h^2) = O(h) \quad , \quad h \to 0$

1.4 Tipp Blatt 3

Aufgabe 1:
$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$$
$z'(x) = f(x, z(x))$ Trapezverfahren!
$$\text{gewünscht: } z(2) = \begin{pmatrix} y(2) \\ y'(2) \\ y''(2) \end{pmatrix}$$