

6. Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 25.5.2011

Aufgabe 1

Zuerst sei $\lambda(\Omega) < \infty$.

Z.z: $\forall q \geq p \geq 1, \mathcal{L}^q(\Omega) \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$

Hölder-Ungleichung: $f \in \mathcal{L}^p(\Omega), g \in \mathcal{L}^{p'}(\Omega) \Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \underbrace{|f \cdot g|}_{\in \mathcal{L}^1} dx \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_{p'}$$

$$|f|^q \mathbb{1}_{\Omega} = (|f|^p)^{\frac{q}{p}} \mathbb{1}_{\Omega} \text{ mbar.}$$

$\lambda(\Omega) \Rightarrow \mathbb{1}_{\Omega} \in \mathcal{L}^s(\Omega), 0 \leq s \leq \infty$

$$\frac{q}{p} \geq 1, r := (1 - \frac{p}{q})^{-1}$$

$(|f|^p)^{\frac{q}{p}} = |f|^q \in \mathcal{L}^1(\Omega) \Rightarrow |f|^p \in \mathcal{L}^{\frac{q}{p}}(\Omega)$ Weiter: $\mathbb{1}_{\Omega} \in \mathcal{L}^r(\Omega)$

$$\stackrel{\text{Hölder}}{\Rightarrow} \underbrace{\mathbb{1}_{\Omega} |f|^p}_{\int_{\Omega} |f|^p dx} \in \mathcal{L}^q(\Omega) \text{ mit } \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\Omega} |f|^p dx \leq \|\mathbb{1}_{\Omega}\|_r \cdot \underbrace{\| |f|^p \|_{\frac{q}{p}}}_{=\|f\|_q} = \|\mathbb{1}_{\Omega}\|_r \cdot \|f\|_q$$

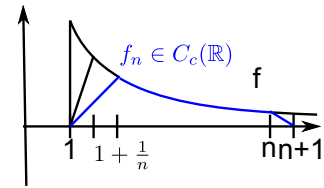
$$\mathbb{1}_{\Omega} |f|^p = |f|^p \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}^p(\Omega)$$

Im Fall $\Omega = \mathbb{R}$ ist weder $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ noch $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, denn

Im: Betrachte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \mathbb{1}_{(1, \infty)} \frac{1}{x}$

Beh.: $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ und $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ($\Rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$)

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n := \begin{cases} \frac{1}{x} & , x \in [1 + \frac{1}{n}, n] \\ \frac{n}{1 + \frac{1}{n}} x - \frac{n}{1 + \frac{1}{n}} & , x \in [1, 1 + \frac{1}{n}] \\ -\frac{1}{n} x + 1 + \frac{1}{n} & , x \in [n, n + 1] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$



$$\Rightarrow f_n \in C_c(\mathbb{R}), f_n \leq f_{n+1}, f_n \rightarrow f \text{ pw } \int_{\mathbb{R}} f_n^2 dx = \int_{1 + \frac{1}{n}}^n \frac{1}{x^2} dx + \int_1^{1 + \frac{1}{n}} \left(\frac{n}{1 + \frac{1}{n}} x - \frac{n}{n + \frac{1}{n}} \right) dx +$$

$$\int_n^{n+1} \underbrace{\left(-\frac{1}{n} x + 1 + \frac{1}{n} \right)}_{\leq 1} dx$$

$$= \left[\frac{1}{x} \right]_{1 + \frac{1}{n}}^n + 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} - 1 \right) + \frac{1}{n} (n + 1 - n) = \underbrace{-\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}}_{\rightarrow 1} + \underbrace{2 \frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$\Rightarrow (f_n^2) \text{ FF mit } f_n^2 \rightarrow f \text{ pw.}$

$\Rightarrow f^2 \in \mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Beh.: $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$: Angenommen, $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}^1$

Nun ist $f_n \in \mathcal{L}^1 \forall n \in \mathbb{N}$ mit $f_n \leq f$

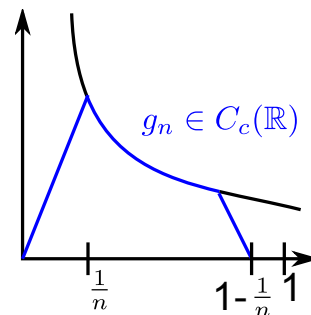
$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f_n \leq \int_{\mathbb{R}} f < \infty$$

$$\infty > \int_{\mathbb{R}} f_n dx \geq \int_{1 + \frac{1}{n}}^n \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_{1 + \frac{1}{n}}^n = \ln(n) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$$

$\geq \ln(n) \rightarrow \infty \Rightarrow \text{Widerspruch.}$

Jetzt zu $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \mathbb{1}_{(0,1)} \frac{1}{\sqrt{x}}$
 Beweis analog zu Beweis von $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \quad f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$



Aufgabe 2

$(f_j) \in \mathcal{L}^1, \quad f_j \rightarrow f$ pw. f.ü. $\exists g \in \mathcal{L}^1$
 $|f_j| \leq g$ f.ü. $\forall j \in \mathbb{N}$
 Beh.: $\int_{\mathbb{R}} |f_j - f| dx \rightarrow 0$
 $f_j \rightarrow f$ pw f.ü.: $\exists N \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge mit
 $f_j(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$
 $|f_j| \leq g$ f.ü. $\forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall j \in \mathbb{N} \exists N_j \in \mathbb{R}^n$ Nullmenge mit
 $|f_j(x)| \leq g(x) \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N_j$
 Sei $N := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} N_j$.
 Dann ist N_j wieder eine Nullmenge mit $|f_j(x)| \leq g(x) \forall j \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$
 $|f_j(x)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} |f(x)| \Rightarrow |f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus N$
 $\Rightarrow |f_j - f| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ pw. f.ü.
 $|f_j - f| \leq |f_j| + |f| \leq g + g = 2g$ f.ü. $\in \mathcal{L}^1$
 $\xRightarrow{\text{Lebesgue}} \int_{\mathbb{R}} |f_j - f| dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0$

Aufgabe 3

Gesucht $(f_j), (g_j) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ mit
 $\|f_j\|_\infty \rightarrow 0, \quad \|f_j\|_2 \rightarrow \infty$
 $\|g_j\|_\infty \rightarrow \infty, \quad \|g_j\|_2 \rightarrow 0$
 Setze $g_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_j(x) = j \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{j^3}]}$
 Dann ist für $j \in \mathbb{N}, \quad g_j \in \mathcal{L}^1$:
 $\|g_j\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |g_j(x)| = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} j = j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$

$$\|g_j\|_2 = \int_{\mathbb{R}} g_j^2 dx = \int_0^{\frac{1}{j^3}} j^2 dx = \frac{j^2}{j^3} = \frac{1}{j} \rightarrow 0$$

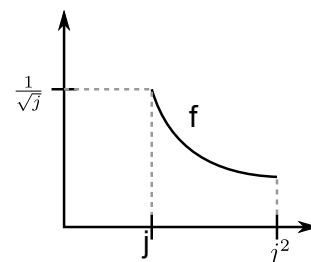
Setze $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_j(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{[j, j^2]}$
 Wie in Aufgabe 1 sieht man $f_j \in \mathcal{L}^1 \forall j \in \mathbb{N}$

Es gilt für $j \in \mathbb{N}$

$$\|f_j\|_2 = \int_{\mathbb{R}} f_j^2 dx = \int_j^{j^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

$$= \int_j^{j^2} \frac{1}{x} = [\ln(j)]_{j^2} = \ln(j^2) - \ln(j) = \ln(j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$$

$$\|f_j\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |f_j(x)| = \text{ess sup}_{x \in [j, j^2]} \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$



Aufgabe 4

- a) Immer: $\bigcap U_\varepsilon(M) = \overline{M} \underset{M \text{ offen}}{\neq} M$
 $M(0,1) \subset \mathbb{R}$
- b) $M_j = \mathbb{R} \times [0, \frac{1}{j}] \Rightarrow \lambda(M_j) = \infty \Rightarrow \inf_{j \in \mathbb{N}} \lambda(M_j) = \infty$
 $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} M_j = \mathbb{R} \times \{0\}$ (echter Unter-Vraum von \mathbb{R}^2)
 $\Rightarrow \lambda(\mathbb{R} \times \{0\}) = 0$
Blatt 1.5
 Geht auch schief: $M_j = [j, \infty)$

Aufgabe 5

(i) \Rightarrow (ii) $\exists (f_k)$ FF. mit $f_k(x) \rightarrow \infty \forall x \in N$

$k, l \in \mathbb{N}, M_{k,l} := f_k^{-1}((l, \infty)) \subset \mathbb{R}^n$ offen
 (f_k stetig ($\in C_c(\mathbb{R})$) und (l, ∞) offen in \mathbb{R})

$M_l := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_{k,l}$ offen in \mathbb{R}^n

Sei $f := \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, f(x) := f_k(x) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x), & \text{falls } \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \text{ ex.} \\ \infty & , \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^+$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k dx$ und speziell $f(x) = \infty \forall x \in N$

$N \leq M_l \leq f^{-1}([l, \infty))$

Sei $\int_{\mathbb{R}^n} f dx =: x \in \mathbb{R}$. Es gilt $N \leq M_l$.

M_l ist die Vereinigung der offenen $M_{k,l}, k \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$\lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_{k,l}\right) = \lambda(M_l) = \int_{M_l} 1 dx \leq \int_{M_l} \underbrace{\frac{f(x)}{l}}_{\leq 1 \forall x \in M_l} dx \leq \frac{1}{l} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \frac{x}{l}$$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle nun $l \in \mathbb{N}$ mit $\frac{x}{l} < \varepsilon \Rightarrow$ (ii)

(ii) \Rightarrow (iii) Zu $\varepsilon > 0, U_\varepsilon$ wie in (ii) gibt nach Blatt 2.1

$(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $U_\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ und

$\lambda(Q_{k_1} \cap Q_{k_2}) = 0, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N} \quad k_1 \neq k_2$

$(Q_{k_1} \cap Q_{k_2} \subset \partial Q_{k_1}, \lambda(\partial Q_{k_1}) = 0)$

$\Rightarrow N \subset U_\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(Q_k) = \lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k\right) = \lambda(U_\varepsilon) < \varepsilon$$

(iii) \Rightarrow (i) Notation wie im Hinweis auf Aufgabenblatt

$(f_N)_{N \in \mathbb{N}} \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_N \leq f_{N+1}$

$x \in M \subset \mathbb{R}^n$ mit (iii):

$$f_N(x) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N f_l^{(k)} \geq \sum_{k=1}^N \underbrace{\sum_{l=1}^N \mathbb{1}_{Q_l^{(k)}}(x)}_{\geq 1} \geq \sum_{k=1}^N 1 = N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \infty,$$

$(M \subset \bigcup_{l \in \mathbb{N}} Q_l^{(k)})$

$$\int_{\mathbb{R}} f_N dx = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f_l^{(k)} dx}_{\leq 2\lambda(Q_l^{(k)})} \leq 2 \sum_{k=1}^N \underbrace{\sum_{l=1}^N \lambda(Q_l^{(k)})}_{\leq \frac{1}{2^k}} \leq 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{2^k} \leq 2 \cdot 1 = 2$$

$\Rightarrow (f_N)_{N \rightarrow \mathbb{N}}$ FF mit $F_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty \forall x \in M$