

6 Übungsblatt von Informatik 3 zum Mittwoch, den 1.6.2011

Aufgabe 1

$$a) H = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow G \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Codewörter:

Nutzwort	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
Codewort	0000000	0001111	0010110	0011001	0100101	0101010	0110011	0111100
Nutzwort	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
Codewort	1000011	1001100	1010101	1011010	1100110	1101001	1110000	1111111

b) Sei H_j die j ($j \in \{1, \dots, 7\}$). Spalte aus H .

$$s^T = H_2$$

\Rightarrow 1 1-Bit-Fehler

$$= H_5 \oplus H_7 = H_4 \oplus H_6 = H_1 \oplus H_3$$

\Rightarrow 3 2-Bit-Fehler

$$= H_3 \oplus H_6 \oplus H_7 = H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 = H_1 \oplus H_5 \oplus H_6 = H_1 \oplus H_4 \oplus H_7$$

\Rightarrow 4 3-Bit-Fehler

$$= H_1 \oplus H_2 \oplus H_4 \oplus H_5 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_6 \oplus H_7 = H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_7 = H_2 \oplus H_3 \oplus H_5 \oplus H_6$$

\Rightarrow 4 4-Bit-Fehler

$$= H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_5 \oplus H_7 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_6 = H_2 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6 \oplus H_7$$

\Rightarrow 3 5-Bit-Fehler

$$= H_1 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6 \oplus H_7$$

\Rightarrow 1 6-Bit-Fehler

$$c) s^T = Hx^T = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\hat{u}_1 = u_1 \oplus e_1 = 0011110 \oplus 0001000 = 0010110 \Rightarrow u_1^* = 0010$$

$$\hat{u}_2 = u_2 \oplus e_2 = 1000000 \oplus 1000000 = 0000000 \Rightarrow u_2^* = 0000$$

$$\hat{u}_3 = u_3 \oplus e_3 = 1110101 \oplus 0100000 = 1010101 \Rightarrow u_3^* = 1010$$

$$\hat{u}_4 = u_4 \oplus e_4 = 0101010 \oplus 0000000 = 0101010 \Rightarrow u_4^* = 0101$$

$$\hat{u}_5 = u_5 \oplus e_5 = 1111101 \oplus 0000010 = 1111111 \Rightarrow u_5^* = 1111$$

Aufgabe 2

$$a) i) M = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ mit } M_i \text{ i-te Zeile}$$

$$M_1^* = M_3 = 100101$$

$$M_2^* = M_2 \oplus M_1 \oplus M_3 = 011101 \oplus 101110 \oplus 100101 = 1100011 \oplus 100101 = 010110$$

$$M_3^* = M_1 \oplus M_3 = 101110 \oplus 100101 = 001011$$

$$\Rightarrow M^* = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{ii) } M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } M_i \text{ i-te Zeile}$$

$$M_1^* = M_1 \oplus M_3 = 12101 \oplus 01221 = 10022$$

$$M_2^* = 2M_1 - M_2 = 12101 \oplus 12101 - 20220 = 21202 - 20220 = 01012$$

$$M_3^* = 2(M_1 \oplus M_2 \oplus M_3) = 2(12101 \oplus 20220 \oplus 01221)$$

$$= 2(02021 \oplus 01221) = 00212 \oplus 00212 = 00121$$

$$\Rightarrow M^* = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

b) i)

Nutzwort	000	001	010	011	100	101	110	111
Codewort vorher:	000000	100101	011101	111000	101110	001011	110011	010110
Codewort nacher:	000000	001011	010110	011101	100101	101110	110011	111000

\Rightarrow Gleiche Menge an Codewörtern, nur Zuordnung geändert.

ii)

Nutzwort	000	001	002	010	011	012	020	021	022
Codewort vorher:	00000	01221	02112	20220	21111	22002	10110	11001	12222
Codewort nacher:	00000	00121	00212	01012	01100	01221	02021	02112	02200
Nutzwort	100	101	102	110	111	112	120	121	122
Codewort vorher:	12101	10022	11210	02021	00212	01100	22211	20102	21020
Codewort nacher:	10022	10110	10201	11001	11122	11210	12010	12101	12222
Nutzwort	200	201	202	210	211	212	220	221	222
Codewort vorher:	21202	22120	20011	11122	12010	10201	01012	02200	00121
Codewort nacher:	20011	20102	20220	21020	21111	21202	22002	22120	22211

\Rightarrow Gleiche Menge an Codewörtern, nur Zuordnung geändert.

c) (i): $H = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

(ii): $H = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$