

7 Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 1.6.2011

Aufgabe 1

Satz (Blatt 5, Aufgabe 2):

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

(i) $\partial_2 f$ ex. auf $\mathbb{R}^n \times U$

(ii) $\forall \lambda \in U$ fest ist $f(*, \lambda) \in \mathcal{L}^1$

(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1$, so dass $\forall (x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times U$ gilt $|\partial_2 f(x, \lambda)| \leq g(x)$

$\Rightarrow F : U \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, \lambda) dx$ diffbar mit

$$F'(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \partial_2 f(x, \lambda) dx$$

Sei $x_0 \in (0, \infty)$, $\varphi : \underbrace{(x_0, \infty)}_{=: U} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) := \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-xt}}_{=: f(t,x)} dt = \frac{1}{x}$

$\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$ zum Satz (i): $\partial_2 f(t, x) = (-t)e^{-xt}$ zu (ii):

$x \in U$ fest:

$g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(t) := \mathbb{1}_{[\frac{1}{n}, n]}(t) \underbrace{e^{-xt}}_{st. \text{ in } t} \in \mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^1$ (Beppo Levi)

$g_n \leq g_{n+1}$

$$\int_{\mathbb{R}} g_n dt = \int_{\frac{1}{n}}^n e^{-xt} dt = [-\frac{1}{x} e^{-xt}]_{\frac{1}{n}}^n = \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{x} - \frac{e^{-xn}}{x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

$f(*, x) = g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(*, x) p.w., f(*, \cdot) \in \mathcal{L}^1$ (Beppo Levi)

zu (iii):

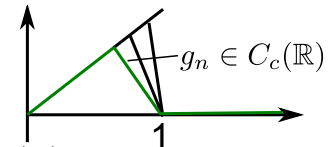
Sei $x \in U$, $t \in \mathbb{R}$

$$|\partial_2 f(x, t)| = |-te^{-xt}| = te^{-xt} \leq \begin{cases} t & , t \in [0, 1] \\ \frac{t}{e^{xt}} & , t \in [1, \infty] \end{cases}$$

$$\frac{t}{e^{xt}} = \frac{t}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!}} \leq \frac{t}{\frac{(xt)^3}{3!}} = \frac{6}{x^3} \frac{1}{t^2} \leq \frac{6}{x_0^3} \frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow |\partial_2 f(t, x)| \leq \underbrace{t \mathbb{1}_{[0,1]}(+)}_{\in \mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^1} + \underbrace{\frac{6}{x_0^3} \frac{1}{t^2} \mathbb{1}_{[1, \infty]}(+)}_{\in \mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^1} =: g(t)$$

$$\int g_n \leq \int_0^1 t dt = [\frac{1}{2} t^2]_0^1 = \frac{1}{2} < \infty$$



(i)-(iii) gelten mit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) := t \mathbb{1}_{[0,1]}(+)+ \frac{6}{x_0^3} \frac{1}{t^2} \mathbb{1}_{[1, \infty]}(+)$

$$\Rightarrow \phi'(x) = \int_0^{\infty} \partial_2 f(t, x) dt = \int_0^{\infty} (-te^{-xt}) dt = - \int_0^{\infty} te^{-xt} dt$$

$$\Rightarrow \varphi^{(n)}(x) = (-1) \frac{1}{x^{n-1}} n!$$

(i): ... $(-t) \rightarrow (-1)^n$

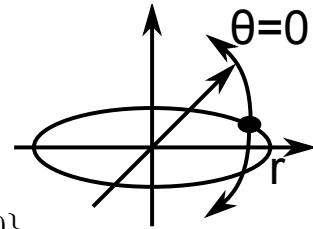
(ii) gilt aus (iii) im Schritt n-1

(iii): $\partial_2 \rightarrow \partial_2^n$ und $-t \rightarrow (-t)^n$ bzw. $t \rightarrow t^n$

$$\Rightarrow \varphi^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} \partial_2^n f(t, x) dx = (-1)^n \int_0^{\infty} t^n e^{-xt} dt$$

$$\Gamma(n+1) \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = (-1)^n \varphi^{(n)}(1) = (-1)^n (-1)^n \frac{n!}{1^{n+1}} = n!$$

Aufgabe 2



$$\begin{aligned}
 \phi &: (0, \infty) \times (0, \pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^3 \\
 \phi(r, \varphi, \theta) &= (r \cos(\varphi) \cos(\theta), r \sin(\varphi) \cos(\theta), r \sin(\theta)) \\
 \text{Bild}(\phi) &= \mathbb{R}^3 \setminus \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0, x_2 = 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\
 \mathbb{R}^2 \times \{0\} &\text{ echter Unterraum von } \mathbb{R}^3 \text{ und damit eine Nullmenge} \\
 \Rightarrow \int_{B_{\|\cdot\|_2}(0,1)} \frac{1}{\|x\|_2^\alpha} dx &= \int_{B_{\|\cdot\|}(0,1) \setminus \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}} \frac{1}{\|x\|_2^\alpha} dx \\
 B_{\|\cdot\|}(0,1) \setminus \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R} &= \text{Bild}(\varphi|_{(0,1) \times (0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}) \\
 \dots &= \int_{(0,1) \times (0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \frac{1}{\|\phi(x)\|_2^\alpha} \cdot |\det(D(\varphi(x)))| dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{r^\alpha} \cdot r^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi dr \\
 &= 4\pi \int_0^1 r^{2-\alpha} = 4\pi \left[\frac{1}{3-\alpha} r^{3-\alpha} \right]_0^1 \\
 &= \frac{4\pi}{3-\alpha} (1 - 0^{3-\alpha}) \\
 &\text{(geht da } 3 - \alpha > 0\text{)}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
 \varepsilon > 0, \quad \alpha_\varepsilon &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha_\varepsilon(x) := \tanh\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\
 \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
 \Rightarrow \tanh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
 \sinh'(x) &= \cosh(x), \quad \cosh'(x) = \sinh(x) \\
 \Rightarrow \tanh'(x) &= \frac{1}{\cosh^2(x)} \\
 \int_{-1}^1 f(x) d\alpha_\varepsilon &= \int_{-1}^1 f(x) \alpha'_\varepsilon(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)} dx \\
 &= \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x\varepsilon) \frac{1}{\cosh^2(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{1}_{[-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]}(x) f(x\varepsilon)}_{\substack{\rightarrow f(0) \text{ pw} \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{\cosh^2(x)} dx \\
 &\qquad\qquad\qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\rightarrow \frac{f(0)}{\cosh^2(x)} \text{ pw} \\ \varepsilon \rightarrow 0}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\mathbb{1}_{[-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]}(x) f(x\varepsilon) \frac{1}{\cosh^2(x)}| &\leq \frac{\|f\|_\infty}{\cosh^2(x)} \\
 g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_n(x) &:= \mathbb{1}_{[-n, n]}(x) \frac{1}{\cosh^2(x)} \in \mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^1 \\
 \int_{\mathbb{R}} g_n(x) dx &= \int_{-n}^n \frac{1}{\cosh^2(x)} dx = [\tanh(x)]_{-n}^n \\
 &= \tanh(n) - \tanh(-n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - (-1) = 2
 \end{aligned}$$

$$\text{Beppo Levi} \Rightarrow \frac{1}{\cosh^2(x)} \in \mathcal{L}^1 \text{ mit } \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\cosh^2(x)} dx = 2 \quad (= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n dx)$$

$$\Rightarrow \frac{\|f\|_\infty}{\cosh^2(x)} \in \mathcal{L}^1$$

$$\text{pw. } \frac{f(0)}{\cosh^2(x)} \xleftarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]}(x) f(x\varepsilon) \frac{1}{\cosh^2(x)}, \quad |\dots| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\cosh^2(x)} \in \mathcal{L}^1$$

Lebesgue:

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}]}(x) f(x\varepsilon) \frac{1}{\cosh^2(x)} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(0)}{\cosh^2(x)} dx = f(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\cosh^2(x)} dx = 2f(0)$$

Aufgabe 4

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \frac{1}{\sqrt{x+x^4}} \quad g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathbb{1}_{(0,1]}(x) \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^1$$

$$g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x) \frac{1}{x^4} \in \mathcal{L}^+ \subset \mathcal{L}^1$$

Sei $g := g_1 + g_2$. Dann ist $g \in \mathcal{L}^1$ mit:

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = \underbrace{\mathbb{1}_{(0,1]}(x) \frac{1}{\sqrt{x+x^4}}}_{\leq \frac{1}{\sqrt{x}}} + \underbrace{\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x) \frac{1}{\sqrt{x+x^4}}}_{\leq \frac{1}{x^4}} \leq g_1(x) + g_2(x) = g(x)$$

wegen $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ist damit auch $|f(x)| \leq g(x)$

Weiter ist f als stetige Funktion messbar.

$\Rightarrow f$ messbar, $|f| \leq g \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1$

Aufgabe 5

Ω offen, beschr. $\Rightarrow \Omega$ mbar:

Ω offen $\Rightarrow \exists (Q_i)$ mit $\Omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$, $Q_i \cap Q_j \subset \partial Q_i \forall i \neq j$

$$\mathbb{1}_\Omega = \mathbb{1}_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i}$$

$$\int \mathbb{1}_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int \mathbb{1}_{Q_i}$$

$$\mathbb{1}_{Q_i} \in \mathcal{L}^+$$

$$\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{Q_i} \in \mathcal{L}^+. \text{ Genauso } \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\text{int}(Q_i)} \in \mathcal{L}^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\mathbb{1}_{Q_i} + \mathbb{1}_{\dot{Q}_i}) \in \mathcal{L}^1$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\mathbb{1}_{Q_i} + \mathbb{1}_{\dot{Q}_i}) = \mathbb{1}_{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} Q_i} = \mathbb{1}_\Omega \in \mathcal{L}^+$$

insb. Ω mbar!

a) f beschr. mbar. $\Rightarrow f \mathbb{1}_\Omega$ mbar, $|f \mathbb{1}_\Omega| \leq \|f\|_\infty \mathbb{1}_\Omega \in \mathcal{L}^1$

$\mathbb{1}_\Omega \in \mathcal{L}^1$ da mbar und endl, also $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_\Omega < \infty$

b) $x \in \Omega$, $f^*(x) = \sup\{f(\tau^j(x)) | j \in \mathbb{N}\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \underbrace{\max_{j \in \{1, \dots, N\}} \underbrace{f(\tau^j(x))}_{\text{mbar, beschr.}}}_{\text{mbar, beschr. d. } \|f\|_\infty \mathbb{1}_\Omega \Rightarrow \in \mathcal{L}^1}$

$\stackrel{\text{(Lebesgue)}}{\Rightarrow} f^* \in \mathcal{L}^1$

