7 Übungsblatt von Informatik 3 zum Mittwoch, den 8.6.2011

15/20

Aufgabe 1

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \cancel{\rho(H) = 3} \quad \Rightarrow d_0 = \rho(H) + 1 = 4$$

4/6

```
rho=3, Begründung:
a: v4-v6 l.u.
b: v1-v3 l.u., da det<>0
c: 2 aus v4-v6&1 aus v1-v3: 1 komp bei E =0, l.u,
d: 1 aus v4-v6&2 aus v1-v3: 2x2-Marix aus (v1lv2v3)
   det(...)<>0. Entwickeln nach Einheitsmatrixspalte:
   => det ebenfalls <>0, also l.u.
=> jeweils 3 l.u. vektoren
```

Aufgabe 2

8/8

a)

n	2^n	$2^5(n+1)$
5	32	192
6	64	224
7	128	256
8	256	288
9	512	320

$\Rightarrow n_0 = 9.$

$2^{n-k-1} = 8 < n = 9 < 2^{n-k} = 15$

Für den verallgemeinerten Hammingcode bestimmen wir $n_1 = 2^{n-k} - 1 = 15$

Daraus folgt zunächst eine $(n - k = 4) \times (n_1 = 15)$-Matrix:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hiervon werden die letzten $n_1 - n = 6$ Spalten gestrichen:

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Zur Umformung benötigen wir die 1., 2., 4. und 8. Spalte, also

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H = \tilde{H} \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) 1) Anhängen eines Parity-Prüfbits erweitert G um eine Spalte:

$$\Rightarrow G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Die Kontrollmatrix wird um eine 0-Spalte und dann um eine 1-Zeile erweitert:

Julian Bergmann
Florian Greiner
Kathleen Klinkmüller

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Da zum Zeilenoperationen zur Umformung der Kontrollmatrix zulässig sind, kann die letzte Zeile einer der beiden Kontrollmatrizen mit der Spaltensumme der anderen Zeilen addiert werden.
Betrachtet man die Einheitsmatrix, so ist klar, dass z.B. von H aus (1) alle Elemente der letzten Zeile 1 werden (da Spaltensumme jeweils 1). Im anderen Teil besteht die letzte Zeile durch das Hinzufügen der Parity-Bits in die letzte Spalte der Generatormatrix eben aus diesen Parities, die anzeigen, ob die Summe der anderen Zeilen (Generatormatrix), also dann Spalten (Kontrollmatrix) 1 (dann Parity 0) oder 0 (Parity 1) ist. Addieren wir nun die Summe und den Parity-Bit, ergibt dies immer 1. Somit lässt sich die eine Kontrollmatrix in die andere Umformen.
Aus der Matrix von (2) kann (1) analog gewonnen werden: Man addiert die Summe der oberen 4 Zeilen auf die untere. für die EInheitsmatrix ist dies immer 0, außer dort, wo die 1 in der untersten Zeile steht (also erwünscht). Für den übrigen Teil wird zur Summe 1 addiert, es entsteht also das Parity-Bit (0 für ungerade=1, 1 für gerade=0).

Aufgabe 3

4/6

a) $n = \frac{q^m - 1}{q-1} = \frac{5^2-1}{5-1} = 6, \quad k = n - m = 6 - 2 = 4, \quad Rang(H) = n - k = 2$

$H : (n-k=2) \times (n=6) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Hy_1^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (022413)^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4H_3$

$Hy_2^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (031420)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3H_5$

$Hy_3^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (024322)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = H_2$

$Hy_4^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (401413)^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \cancel{4H_5 + H_6}$ $3H_6$

$\Rightarrow y_1^* = 022413 + 004000 = 021413 \qquad \Rightarrow \hat{y}_1 = 0214$ (Nutzwortanteil)
$\Rightarrow y_2^* = 031420 + 000030 = 031400 \qquad \Rightarrow \hat{y}_2 = 0314$ (Nutzwortanteil)
$\Rightarrow y_3^* = 024322 + 010000 = 034322 \qquad \Rightarrow \hat{y}_3 = 0343$ (Nutzwortanteil)
$\Rightarrow y_4^* = 401413 + 000041 = 401404 \qquad \Rightarrow \hat{y}_4 = 4014$ (Nutzwortanteil)

b) $n = \frac{q^m - 1}{q-1} = \frac{7^2-1}{7-1} = 8, \quad k = n - m = 8 - 2 = 6, \quad Rang(H) = n - k = 2$

$H : (n-k=2) \times (n=8) = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Hy_1^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (56022461)^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5H_7$ $4H_7$

$Hy_2^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (16310662)^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 5H_7$ $2H_5$

$Hy_3^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (25535251)^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 4H_4$ $2H_5$

$\Rightarrow y_1^* = 56022461 + 00005000 = 56020461 \qquad \Rightarrow \hat{y}_1 = 560204$ (Nutzwortanteil)
$\Rightarrow y_2^* = 16310662 + 00000050 = 16310642 \qquad \Rightarrow \hat{y}_2 = 163106$ (Nutzwortanteil)
$\Rightarrow y_3^* = 25535251 + 00040000 = 25505251 \qquad \Rightarrow \hat{y}_3 = 255052$ (Nutzwortanteil)