8 Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 8.6.2011

Aufabe 1

a) $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad \hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1-it}{1+t^1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+it}$

b) $\hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{cases}\frac{\sin(t)}{2}+\frac{2\cos(t)}{t^2}-\frac{2\sin(t)}{t^3}+i(\frac{\cos(t)}{t}+\frac{2\sin(t)}{t^2}+\frac{2\cos(t)}{t^3}+\frac{2}{t^3}) & t\neq 0\\ \frac{1}{3} & t=0\end{cases}$

c) $\hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{1+t^2}$

d) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{cases}2\frac{\sin(t)}{t} & t\neq 0\\ 2 & t=0\end{cases}$

Aufabe 2

$\hat{f},g\in\mathcal{L}^1$

$\int\limits_{\mathbb{R}}\hat{f}gdxt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{R}\int\limits_{\mathbb{R}}g(t)f(x)e^{-ixt}dxdt$

$h(t,x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g(t)f(x).$

$h\overset{!}{\in}\mathcal{L}^1\Rightarrow\hat{f},g\in\mathcal{L}^1(\hat{f}g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int h(t,x)dx\text{ (Fubini)})$

$\int\limits_{\mathbb{R}}\hat{f}gdt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}g(t)f(x)e^{-ixt}dxdt\underset{Fubini}{=}\int\limits_{\mathbb{R}^2}e^{-itx}h(t,x)d(t,x)$

Auch nach Fubini: $\int\limits_{\mathbb{R}}\hat{f}gdt=\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}g(t)f(x)e^{-itx}dtdx=\int\limits_{\mathbb{R}}\hat{g}fdx$ Z.z.: $h\in\mathcal{L}^1$:

1. Schritt: $g,f\in\mathcal{L}^+\Rightarrow h\in\mathcal{L}^+\subset\mathcal{L}^1$

2. Schritt: $g,f\in\mathcal{L}^1\Rightarrow h\in\mathcal{L}^1$

1. Schritt:

$(g_n),(f_n)$ FF, $g_n\to g,\ f_n\to f$

$h_n(t,x):=g_n(t)f_n(x)$

$\Rightarrow h_n$ FF, $\int\limits_{\mathbb{R}}\hat{f}gdt$ pw.

$\Rightarrow h\in\mathcal{L}^1$

2. Schritt:

$g=g_1-g_2,\quad f=f_1-f_2,\quad mit g_1,g_2,f_1,f_2\in\mathcal{L}^+$

$h(t,x)=g(t)f(x)=\underbrace{g_1(t)f_1(x)}_{h_1(t,x)}-\underbrace{g_2(t)f_1(x)}_{h_2(t,x)}-\underbrace{g_1(t)f_2(x)}_{h_3(t,x)}+\underbrace{g_2(t)f_2(x)}_{h_4(t,x)}$

Schritt 1 $\Rightarrow h_1-h_4\in\mathcal{L}^1\quad\Rightarrow h=h_1-h_2-h_3+h_4\in\mathcal{L}^1$

Aufabe 3

a) $l^2:=\{(a_n)\subset\mathbb{C}\big|\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2<\infty\}$

Haben Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n:\ <x,y>=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$

$\sqrt{<x,x>}=||x||=\big(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2\big)^{\frac{1}{2}}$

Z.z.: $<*,*>: l^2 \times l^2 \to \mathbb{C},\ <(x_n),(y_n)>= \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n}$ ist sklprod.

1. $<*,*>$ wohldefiniert?
   $(x_n),(y_n) \in l^2$, Also für $N \in \mathbb{N}\ \sum\limits_{n=1}^{N} |x_n\overline{y_n}| \leq \big(\sum\limits_{n=1}^{N} |x_n|^2\big)^{\frac{1}{2}} \cdot \big(\sum\limits_{n=1}^{N} |y_n|^2\big)^{\frac{1}{2}}$
   (Cauchy-Schwarz Ungl., siehe Ana2)
   $\leq \big(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2\big)^{\frac{1}{2}} \cdot \big(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^2\big)^{\frac{1}{2}} < \infty$
   $\Rightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n}$ ist absolut konvergent, insbes. ex die Reihe.
2. $\forall (x_n),(y_n),(z_n),\ \lambda,\mu \in \mathbb{C}$ gilt:
   $<\lambda(x_n)+\mu(y_n),(z_n)>= \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} (\lambda x_n + \mu y_n)\overline{z_n}$
   $\lim\limits_{N\to\infty} \lambda \sum\limits_{n=1}^{N} x_n\overline{z_n} + \lim\limits_{N\to\infty} \mu \sum\limits_{n=1}^{N} y_n \cdot \overline{z_n}$
   $= \lambda <(x_n),(z_n)> + \mu <(y_n),(z_n)>$
   Genauso sieht man:
   $<(z_n),\lambda(x_n)+\mu(y_n)>= \overline{\lambda} <(z_n),(x_n)> + \overline{\mu} <(z_n),(y_n)>$

1.,2. $\Rightarrow <*,*>$ ist sklprod.
$\Rightarrow ||.|| := \sqrt{<*,*>}$ ist Norm.

b) In $\mathbb{R}^n$ gilt: $(x_n) \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt $\Rightarrow \exists (x_{n_k})$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$, d.h. $|x_{n_k} - x| \to 0$
Im unendlich dimnsionalen Raum l^2 geht das schief:
z.B. $l^2 \ni e_n = (0,...,0,1,0,...,0)$ (1 an nter Stelle) $||e_n||_2 = ||e_n|| = 1(||.||ausa)$
$(e_n) \subset l^2$ist beschr., liegt sogar im Einheitsball, aber:
Angenommen, es gibt Teilfolge (e_{n_k}) und $(x_i) \subset l^2$ mit $||e_{n_k} - x_i||_2^2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$
$||...||_2 = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} |(e_{n_k})_i - x_i|^2 \underset{j\in\mathbb{N}}{\geq} |(e_{n_k})_j - x_j|$
$\Rightarrow |(e_{n_k})_j - x_j| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ Aber $(e_{n_k})_j \overset{n_k \geq j}{=} 0 \quad (n_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty)$
$\Rightarrow x_j = 0$
$\Rightarrow 1 = ||e_{n_k}||_2 = ||e_{n_k} - 0||_2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow$ Widerspruch!

Aufabe 4

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$
$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{i0x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = 1$

b) $(\hat{f})'(t) \overset{!}{=} -t\hat{f}(t)$
$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-itx}}_{g(x,t)}dx$

(i) $\partial_2 g(x,t) = (-ix)g(x,t) \quad \forall x,t \in \mathbb{R}$

(ii) $g(*,t) \in \mathcal{L}^1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
(siehe Beweis für die Existenz der Fouriertransformierte für Fkt.n aus $\mathcal{L}$

(iii) $\forall x,t\in\mathbb{R}: \quad |\partial_2 g(x,t)| = |x\cdot g(x,t)| = |x|e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{|x|}{e^{\frac{x^2}{2}}} \in \mathcal{L}^1$

$$\frac{|x|}{e^{\frac{x^2}{2}}} \leq \begin{cases} R & ,t\in[-R,R] \\ \frac{|x|}{\frac{(\frac{x^2}{2})^2}{2!}} & ,t\in\mathbb{R}\setminus[-R,R] \in \mathcal{L} \end{cases}$$

$h_1,h_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad h_1(x) = R\mathbb{1}_{[-R,R]}(x), \quad h_2(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-R,R]}\frac{1}{2}\frac{1}{|x|^3}$

$h_1,h_2\in\mathcal{L}^1 \quad \Rightarrow h_1+h_2\in\mathcal{L}^1$

$|\partial_2 g(x,t)| \leq h_1(x)+h_2(x)$

$$\Rightarrow (\hat{f})'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\partial_2 g(x,t)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(-ix)e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ixt}dx = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left(-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}[-e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ixt}] + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}e^{-\frac{x^2}{2}}(-it)e^{-itx}dx\right)$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{i^2t}{\sqrt{2\pi}}\int_{-R}^{R}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ixt}dx = -\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-ixt}dx = -t\hat{f}(t)$$

$$\text{(a),(b)}\Rightarrow \begin{cases} \hat{f}'(t) = -t\hat{f}(t) & t\in\mathbb{R} \\ \hat{f}(0) = 1 \end{cases}$$

$$-\frac{t^2}{2} = [-\frac{s^2}{2}]_0^t = \int_0^t(-s)ds = \int_0^t\frac{\hat{f}'(s)}{\hat{f}(s)}ds = [\ln(\hat{f}(s))]_0^t = \ln(\frac{\hat{f}(t)}{\hat{f}(0)})$$

$$\Rightarrow \hat{f}(t) = \hat{f}(0)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}} = f(t)$$

Aufabe 5

a) $L^2(I=[0,2\pi],R)$

$u_1,...,u_n\in L^2$, orthogonal: $<u_i,u_j>_{L^2} = 0\forall i,\neq j, i,j\in\{1,...,n\}$

$U = span\{u_1,...,u_n\}$ (dim U=n)

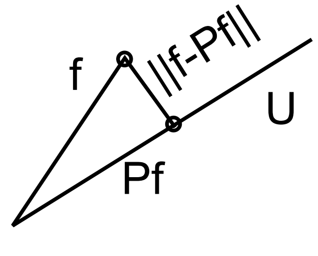
Im $\mathbb{R}^n: x_1,...,x_n\in\mathbb{R}^N$ orthogonal $(n<N): <x_j,x_j>_{\mathbb{R}^N} = 0, \; i\neq j$

$U = span\{x_1,...,x_n\}, \quad P:\mathbb{R}^n\to U$

$$Px = \sum_{i=1}^{n} <x,x_i>_{\mathbb{R}^2} x_i$$

Hier in $\mathcal{L}^2: \; P:\mathcal{L}^2\to U$

$$Pf := \sum_{i=1}^{m}\underbrace{<f,u_i>_{\mathcal{L}^2}}_{=\int_{\mathbb{R}}fu_i dx} u_i$$



b) $\forall u\in U: ||f-u||_{\mathcal{L}^2} \geq ||f-Pf||_{\mathcal{L}}^2$

In anderen WOrten: $||f-Pf||_{\mathcal{L}}^2 = \inf_{u\in U}||f-u||_{\mathcal{L}}^2$

$$u\in U\Rightarrow u = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i$$

$||f-u||_{\mathcal{L}^2}^2 = ||f||_{\mathcal{L}^2}^2 + ||u||_{\mathcal{L}^2}^2 - 2<f,u>_{\mathcal{L}^2}$

$||f-Pf||_{\mathcal{L}^2}^2 = ||f||_{\mathcal{L}^2}^2 + ||Pf||_{\mathcal{L}^2}^2 - 2<f,Pf>_{\mathcal{L}^2}$

$$||Pf||_{\mathcal{L}^2}^2 = \sum_{i=1}^{n}|<f,n_i>|^2 = <f,Pf>_{\mathcal{L}^2}$$

$\Rightarrow ||f-Pf||_{\mathcal{L}^2}^2 = ||f||_{\mathcal{L}}^2 - ||Pf||_{\mathcal{L}^2}^2$

$$\Rightarrow \left[||f-u||_{\mathcal{L}^2}^2 \overset{!}{\geq} ||f-Pf||_{\mathcal{L}^2}^2 \Leftrightarrow ||u||_{\mathcal{L}^2}^2 - 2<f,u>_{\mathcal{L}^2} \overset{!}{\geq} -||Pf||_{\mathcal{L}^2}^2\right]$$

$$||u-Pf||_{\mathcal{L}^2}^2 = ||u||_{\mathcal{L}^2}^2 - 2\underbrace{<f,u>_{\mathcal{L}^2}}_{<Pf,u>_{\mathcal{L}^2}} + ||Pf||_{\mathcal{L}^2}^2 \geq 0$$