

# 10 Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 22.6.2011

## Aufgabe 1

$$\text{Z.z.: } \mathbb{F}h_n = ch_n$$

$$\text{Beh.: } h'_n(x) = xh_n(x) - h_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Beweis:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} [e^{-x^2}]^{(n)}$$

$$h_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$$

$$h'_n(x) = (-x)e^{-x^2/2} H_n(x) + e^{-x^2/2} H'_n(x)$$

$$= (-x)h_n(x) + e^{-x^2/2} ((-1)(2x)e^{x^2} [e^{-x^2}]^{(n)} + (-1)^n e^{x^2} [e^{-x^2}]^{(n+1)})$$

$$= (-x)h_n(x) + 2xh_n(x) - h_{n+1}(x) = xh_n(x) - h_{n+1}(x)$$

Wir haben auf Blatt 8 Aufgabe 4 gezeigt:  $\mathbb{F}h_0 = h_0$

Damit gibt es ein  $n \in \mathbb{N}_0$  und ein  $c_n \in \mathbb{C}$  mit  $\mathbb{F}h_n = c_n h_n$

Es folgt mit  $c := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ :

$$\mathbb{F}h_{n+1}(x) = c \int_{\mathbb{R}} h_{n+1}(y) e^{-ixy} dy = c \int_{\mathbb{R}} (yh_n(y) - h'_n(y)) e^{-ixy} dy$$

$$= \frac{1}{-i} \frac{d}{dx} c \int_{\mathbb{R}} h_n(y) e^{-ixy} dy - ix c \int_{\mathbb{R}} h_n(y) e^{-ixy} dy$$

$$= i \hat{h}'_n(x) - ix \hat{h}_n(x) = i(c_n h'_n)'(x) - ix(c_n h_n)(x)$$

$$= ic_n h'_n(x) - ix c_n h_n(x) = ic_n (h'_n(x) - xh_n(x))$$

$$= -ic_n h_{n+1}(x) = c_{n+1} h_{n+1}(x) \text{ mit } c_{n+1} i = (-ic_n) = (i)^{n+1} c_0 = (-1)^{n+1}$$

## Aufgabe 2

$$F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(\lambda) = UR - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

$$\text{Für } \lambda > 0 \text{ ist } F(\lambda) = LI - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

a) Sei  $\lambda_0 \in (0, \infty)$  und  $f : (\frac{\lambda_0}{2}, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\lambda, x) := e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x}$

i)  $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x) = (-x) e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x} = -e^{-\lambda x} \sin(x)$

ii)  $f(\lambda, *)$  mbar.  $\forall \lambda \in (\frac{\lambda_0}{2}, \infty)$

$$|f(\lambda, x)| \leq e^{-\lambda x} \leq e^{-\frac{\lambda_0}{2} x} \quad \forall \lambda \in (\frac{\lambda_0}{2}, \infty), \quad x \in (0, \infty)$$

$$[x \mapsto e^{-\frac{\lambda_0}{2} x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)] \in \mathbb{L}^1$$

$$\Rightarrow f(\lambda, *) \in \mathbb{L}^1 \quad \forall \lambda \in (\frac{\lambda_0}{2}, \infty)$$

iii)  $\forall \lambda \in (\frac{\lambda_0}{2}, \infty), \quad x \in (0, \infty)$

$$|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x)| \leq e^{-\lambda x} \leq \underbrace{e^{-\frac{\lambda_0}{2} x}}_{\text{unabh. v } \lambda}$$

$$[x \mapsto e^{-\frac{\lambda_0}{2} x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)] \in \mathbb{L}^1$$

$$F \text{ diffbar mit } F'(\lambda) = - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sin(x) dx$$

$$|F(\lambda)| \leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = [-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

Weiter gilt:

$$F'(\lambda) = - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sin(x) dx$$

$$= -[e^{-\lambda x}(-\cos(x))]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}(-\lambda) \cdot (-\cos(x)) dx$$

$$= -1 + [e^{-\lambda x} \sin(x)]_0^{\infty} - \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}(-\lambda) \sin(x) dx$$

$$= -1 + \lambda^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sin(x) dx$$

$$= -1 - \lambda^2 F'(\lambda) \Rightarrow F'(\lambda) = -\frac{1}{1+\lambda^2} = -\arctan'(\lambda)$$

$$\Rightarrow F(\lambda) = -\arctan(\lambda) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$0 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(\lambda) = -\frac{\pi}{2} + c \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \text{ und } F(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\lambda)$$

b) Wir wissen aus a):

$$\int e^{-\lambda x} \sin(x) dx = [e^{-\lambda x}(-\cos(x)) - e^{-\lambda x} \sin(x)] - \lambda^2 \int e^{-\lambda x} \sin(x) dx$$

$$= \frac{1}{1+\lambda^2} [e^{-\lambda x}(-\cos(x)) - e^{-\lambda x} \sin(x)]$$

Sei  $R > 0, \lambda \in [0, 1]$ . Dann ist

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x} dx = \left[ \frac{1}{1+\lambda^2} (e^{-\lambda x}(-\cos(x)) - e^{-\lambda x} \sin(x)) \right]_x=R^{\infty} + \int_R^{\infty} \frac{1}{1+\lambda^2} (e^{-\lambda x}(-\cos(x)) - e^{-\lambda x} \sin(x)) \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \left| \int_R^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq 2 \frac{1}{R} + 2 \int_R^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{R} + \left[ -\frac{2}{x} \right]_R^{\infty} \leq \frac{4}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es ein  $R_1 > 0$  mit

$$\left| \int_R^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad R \geq R_1$$

Weiter gibt es ein  $R_2 > R_1$  mit

$$\left| UR - \int_R^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall R > R_2$$

Jetzt gibt es noch ein  $1 > \delta > 0$  mit

$$\left| \int_0^{R_2} \frac{\sin(x)}{x} dx - \int_0^{R_2} \frac{\sin(x)}{x} e^{-\lambda x} dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall \lambda \in [0, \delta]$$

Insgesamt ist jetzt

$$\left| UR - \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - F(\lambda) \right|$$

$$= \left| UR - \int_{R_2}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_0^{R_2} \frac{\sin(x)}{x} dx - \int_0^{R_2} e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x} dx - \int_{R_2}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin(x)}{x} dx \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

Insbesondere gilt:

$$\varepsilon > \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left| UR - \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - F(\lambda) \right| = \left| UR - \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \frac{\pi}{2} \right|$$

### Aufgabe 3

a) Sei  $f \in \mathbb{L}^1$ . Dann ist für  $\frac{-x^2}{2}$

$$\hat{f}(x) = c \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ixy} dy = c \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{i(-x)y} dy$$

$$\stackrel{y \rightarrow -y}{=} c \int_{\mathbb{R}} f(-y) e^{ixy} dy = [f \circ (-id)]^\vee$$

b) Für  $\varphi \in \mathbb{S}$  :

$$\mathbb{F}^2\varphi = \mathbb{F}(\hat{\varphi}) = \mathbb{F}([\varphi \circ (-id)]^\vee) = \varphi \circ (-id)$$

$$\mathbb{F}^4\varphi = \mathbb{F}^2(\varphi \circ (-id)) = \varphi \circ (-id) \circ (-id) = \varphi$$

Für  $f \in \mathbb{L}^2$  gibtes  $(\varphi_n) \subset \mathbb{S}$  mit  $\varphi_n \rightarrow f \in L^2$

$$\Rightarrow \|\mathbb{F}^4 f - \mathbb{F}^4 \varphi_n\|_{L^2} = \|\mathbb{F}^3 f - [\mathbb{F} \varphi_n]\|_{L^2} = \dots = \|f - \varphi_n\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|\mathbb{F}^4 f - f\|_{L^2} \leq \|\underbrace{\mathbb{F}^4 \varphi_n}_{\rightarrow 0} - \mathbb{F}^4 f\|_{L^2} + \|\underbrace{\mathbb{F}^4 \varphi_n - \varphi_n}_{=0}\|_{L^2} + \|\dots\|$$

$$\underbrace{\varphi_n}_{n \rightarrow 0} - f\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{F}^4 f = f$$

c) Aus Aufgabe 1 wissen wir  $\mathbb{F} h_n = (-i)^n h_n$

$(-i)^n$  sind EW von  $\mathbb{F}$

Aus b) wissen wir für einen EW  $\lambda \in \mathbb{C}$  von  $\mathbb{F}$  mit EF  $f \in \mathbb{L}^2$  :

$$f = \mathbb{F}^4 f = \lambda^4 \cdot f \Rightarrow \lambda^4 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda \in \{\pm 1, \pm i\}$$

Damit gibt es nur  $\pm 1$  und  $\pm i$  als EW von  $\mathbb{F}$

## Aufgabe 4

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \sqrt{\frac{1}{n}} \frac{\sin^2(nt)}{(nt)^2}$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) := \frac{\sin^2(t)}{t^2}$$

$g \in \mathbb{L}^1$  (Blatt 9, Aufgabe 2)

Mit Transformationsformel für Lebesgue int. Fu' erhalten wir, dass  $f_n \in \mathbb{L}^1$

mit

$$\|f_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f_n(t)}_{\geq 0} dt = \sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(nt)}{(nt)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} g(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Sei } h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) := \begin{cases} 2 - |x| & , |x| \leq 2 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathbb{L}^1 \ni h = \hat{g}$ ,  $\hat{f}_n \in \mathbb{L}^1$ . Wieder mit Transformationsatz erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-ixt} dt \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} n g(nt) e^{-ixnt} dt \right) dx$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_n(xn) dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}_n(x) dx$$

$$\Rightarrow \|\hat{f}_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}} h(x) dx \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

## Aufgabe 5

$$\text{QM: } u(x, t) \in \mathbb{R} : \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u''(x), \quad u(x, t) = u_1(x)u_2(t), \quad \begin{cases} \ddot{u}_2 \dots \\ u_1''(x) = cu_1(x) \end{cases}$$

mit  $u(x, y) = u_1(x) \cdot u_2(y)$

$$u_{1,2}''(x) = cu_1(x), \quad c \in (0, a) \text{ bzw. } (0, b)$$

$$u_1(0) = u_1(a) = 0, \quad u_2(0) = u_2(b) = 0,$$

$$u_1 = \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right), \quad u_2 = \sin\left(\frac{m\pi}{d}\right)$$

$$\Delta u = cu, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$