1 Jochens Hinweise zur Klausur in Analysis 4

- Fubini: wann welches Integral vertauschen/berechenbar/existent!
- Riemann-Stieltjes
- Orthonormalisierung bzgl. $\mathcal{L}^2$ mit/ohne Gewicht auf Menge
- Fourier-Transformation
- Lösung einer DGL mit Randwertproblemen mit Fourier-Reihe
  Beispiel:

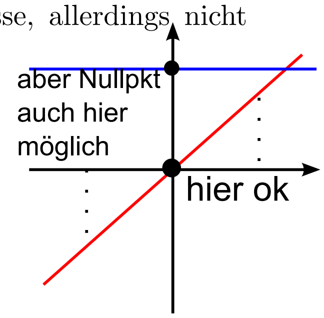
  $$f(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k[t]e^{ikx} \quad \in \mathcal{L}^2[a,b]$$
  $$f(x,t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
  $$\partial_x^2 f = -\partial_t^2 f$$

  $$\partial_x^2 f = \sum \alpha_k(t)(-k^2)e^{ikx}$$

  $$\partial_t^2 f = \sum \ddot{\alpha}_k(t)e^{ikx}$$

  $$\Rightarrow \ddot{\alpha}_k = +k^2\alpha_k$$
  $$\Rightarrow \alpha_k = \underbrace{\alpha_k}_{=0\forall k\geq 0} e^{kt} + \underbrace{b_k}_{=0\forall k\leq 0} e^{-kt}$$
  $$\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k e^{-kt}e^{ikx}$$
  etc., siehe aktuelles Blatt

- Integrierbar, Riemann-integrierbar?
  $\sum a_n intbar \Leftrightarrow \sum |a_n| < \infty$
  $\exists R - \int_a^b f, \qquad \exists \int f dx \;\Leftrightarrow \int |f| < \infty$
  Beispiel: $\frac{\sin(x)}{x}$ auf $[0,\infty)$ schwankt stark und unterscheidet sich in int'barkeiten
  $\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int f(x)\mathbb{1}_{[-n,n]}dx$
  $= \frac{a}{2} = \frac{a+n^2-n^2}{2} = \frac{x^2}{2}|_{-n}^{\sqrt{a^2+n^2}} = \int_{-n}^{\sqrt{a^2+n^2}} xdx = \int x\mathbb{1}_{[-n,\sqrt{a^2+n^2}]}dx$
  Wäre es Lebesgue-Integrierbar, müsste der Wert unabhängig von den Grenzen sein,
  Riemann: Änderung der Grenze ändert das Ergebnis (bzgl. ganz $\mathbb{R}$)
  nicht-Lebesgue-Intbare Funktionen erhalten auch unter Umständen Ergebnisse, allerdings nicht eindeutig!

  $\int_{\mathbb{R}} |x| = 2\frac{x^2}{2}|_0^\infty = \infty \quad \Rightarrow x \notin \mathcal{L}^2$
  Lebesgue hieße: $\int xdx = \int x^+ d\lambda - \int x^- d\lambda = \int_0^\infty xdx - \int_{-\infty}^0 (-x)dx = \infty - \infty$
  $\int f' d\lambda = f(\infty) - f(-\infty)$
  Lebesgue-Integrierbare Funktionen wären z.b.
  $\forall \alpha > 0 : \int \frac{1}{x^\alpha}\mathbb{1}_{1,\infty}dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_1^\infty$
  $e^{-|t|} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \quad e^{-t^2} \in \mathcal{L}^1, \quad e^{-t}\mathbb{1}_{[0,\infty)} \in \mathcal{L}^1$
  $\frac{1}{x}\mathbb{1}_{[1,\infty)} \notin \mathcal{L}^1$

- Schwache D'barkeit
  f schwach d'bar: $|$Abb. $f' \quad \Leftrightarrow \int f'\varphi = -\int f\varphi' \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$
  z.B. $f \in \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^1, \quad F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

z.Z.: $f, \varphi \mathcal{C}_C^\infty: \int F\varphi' d\lambda = \int \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dx\varphi' dx$

$= \int\int f(t)\mathbb{1}_{\{t\leq x\}}dt\varphi'(x)dx = \int\int \varphi'(x)\mathbb{1}_{\{x\geq t\}}f(t)dt$

$= \int \underbrace{\int\limits_t^\infty \varphi'(x)dx}_{\varphi(x)|_t^\infty} f(t)dt = -\int \varphi(t)f(t)dt$

$\lambda(A) = \int \mathbb{1}_A d\lambda$

$\int |\varphi'| \leq \lambda(supp(\varphi'))||\varphi'||_\infty$

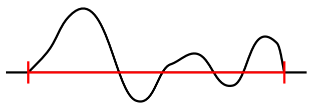
$= \int |\varphi'|\mathbb{1}_{supp(\varphi')}dx \int\int |f(x)\varphi'(x)\mathbb{1}_{\{t\leq x\}}|dxdt = \int \int\limits_{-\infty}^{t} |f(t)|dt\varphi'(x)dx \leq ||f||_2||\varphi'||_2 < \infty$

$\mathcal{C}_c^\infty: \quad supp(\varphi) \subset \mathbb{R} kp.$

$supp(\varphi)$ (Träger) $= \overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}}$

Fubini: $\int f(x,y)d\lambda_2(x,y) = \int\int f(x,y)dxdy, \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$

$(\lambda[a,b] = b-a)$



- Rechenprobe $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x^2e^{-\lambda x^2}}_{*\in\mathcal{L}^2\forall\lambda>0} dx$

  *geht schnell gegen 0 für x gegen ∞!

  $|\underbrace{\partial_\lambda x^2e^{-\lambda x^2}}_{-x^2 f_\lambda}| \leq g$

  $e^{-\lambda x} \downarrow in \lambda$

  $|e^{-\lambda x}| \leq e^{-\lambda_0 x} \quad \forall\lambda \geq \lambda_0$ Sei $\lambda_0 > 0 \quad \Rightarrow e^{-\lambda x^2} \leq e^{-\frac{\lambda_0}{2}x^2} \in \mathcal{L}^1$

  Für Vertauschbarkeit nur zu betrachten: ist in diesem Punkt Snglarität?

  Wenn in Umgebung definiert, erhält man die benötigte Majorante wie hier durch Differentation!

  Wir wissen allgemein (notfalls hierüber argumentieren):

  $e^{-\lambda x} \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow x^\alpha e^{-\lambda x} \in \mathcal{L}^1$

  $\frac{1}{x^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \quad \frac{1}{x^2} \in \mathcal{L}^1[1,\infty), \quad \frac{1}{x^2+1} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}), \quad \frac{1}{x} \in \mathcal{L}^1(K), \; K \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}, \; kp.$

  $\int\limits_{\mathbb{R}} sin(x)dx$ ex. nicht.

  Angenommen, es existiert, dann $\int \cos(x) = \int \sin(x) \;\Rightarrow \int \underbrace{e^{ix}}_{|.|=1} = (1+i)I$, also nicht intbar!