12 Übungsblatt von Analysis 4 zum Mittwoch, den 06.07.2011

Aufabe 1

$f : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \quad fx) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin(kx)$

Satz 14.1:

(u_n) k-mal st. diffbar.
$u_n \to u^*$ lokal glm. konv. in M ($M \subset \mathbb{R}^n$ offen), dann

(a) u^* stetig

(b) $\forall$ Multiindizes $\alpha, \ |\alpha| \leq k$
(∂^α) lokal glm. konv. $\Rightarrow u^* \ C^k$ mit $\partial^\alpha u^* = \lim_{n\to\infty} \partial^\alpha u_n$ (bzgl. lokal $||.||_\infty$ (1))

zu (1): $\forall x \in M \exists \delta > 0$ mit $\sup_{y\in B(x,\delta)} (|(u_n \to u^*)(x)| \to 0$

a) Seien $u_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \quad u_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \sin(kx)$,
$n \leq m : \quad |(u_n - u_m)(x)| = \big| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^3} \sin(kx) \big| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^3}$
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ konv., d.h. zu $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^3} < \infty \quad \forall n,m \geq n_0$
$\Rightarrow ||u_m - u_m|| \leq \varepsilon \quad \forall n,m \geq n_0$
Satz 11.1 liefert: f stetig.

b) $(*) \begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x \partial_x u(t,x) \quad \forall t \geq 0, \ x \in [0,\pi] \\ u(0,x) = f(x) \quad \forall x \in [0,\pi], \quad u(t,0) = 0 = u(t,\pi) \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$

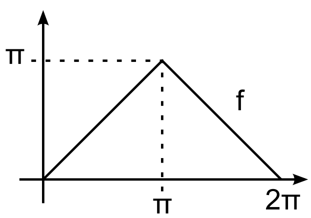
Idee: Die Fkt. $u : [0,\infty] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}, \ u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \sin(kx)$
mit $\alpha_k C_1, \ k \in \mathbb{N}$ könnte vielleicht $(*)$ lösen.
Vermutung $\partial_t u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k'(t) \sin(kx)$
$\partial_x \partial_x u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)(-k^2) \sin(kx)$
Ist u eine LÖsung von $(*)$, dann gilt für $l \in \mathbb{N}$:
$< \partial_t u(t,x), \sin(l*) >_{\mathbb{L}^2} = \alpha_l(t) \cdot || \sin(l*)||^2_{\mathbb{L}^2}$
$< \partial_x \partial_x u(t,*), l*) >_{\mathbb{L}^2} = \alpha_l(t)(-l^2)|| \sin(l*)||^2_{\mathbb{L}^2}$
$\Rightarrow \alpha_l'(t) = -l^2 \alpha_l(t) \quad \Rightarrow \alpha_l(t) = \alpha_l(0) e^{-l^2 t}$
Wegen $u(0,x) = f(x) \quad \forall x \in [0,\pi]$ gilt für $k \in \mathbb{N}$
$< u(0,*), \sin(k*) >_{\mathbb{L}^2} = \alpha_k(0)|| \sin(k*)||^2_{\mathbb{L}^2}$
$=< f, \sin(k*) >_{\mathbb{L}^2} = \frac{1}{k^3} || \sin(k*)||^2_{\mathbb{L}^2}$
$\Rightarrow \alpha_k(0) = \frac{1}{k^3}$
$\Rightarrow u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 t}}{k^3} \sin(kx)$
Sei nun $u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 t}}{k^3} \sin(kx)$

Wir zeigen nun, dass u $(*)$ löst.
Dazu wenden wir den Satz 11.1 auf u mit $l \in \{0,1,2\}$ an.

$l = 0$: Sei $(t,x) \in [0,\infty) \times [0,\pi]$. Dann ist für $(s,y) \in [\frac{t}{2},\infty) \times [0,\pi)$
$u_n[\frac{t}{2},\infty) \times [0,\pi] \to \mathbb{R},\ u_n(s,y) := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{-k^2 s}}{k^3} \sin(ky)$
$n \le m: \quad |(u_n - u_m)(t,x)| \le \sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{e^{-k^2 s}}{k^3} \le \sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^3} < \varepsilon$
für bel. $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N} u, m \ge n_0$
$\overset{Satz\ 11.1}{\Rightarrow}$ u stetig in (x,t) $\quad \Rightarrow u$ stetig..

$l = 1$: nach t: $\partial_t u_n(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-k^2) \frac{e^{-k^2 t}}{k^3} \sin(kx)$
Sei (t,x) fest gewählt, $(s,y) \in [\frac{t}{2},\infty) \times [0,\pi]$
$n \le m: \quad |(\partial_t u_n - \partial_t u_m)(s,y)| \le \sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{e^{-k^2 s}}{k} \le \sum\limits_{k=n+1}^{m} e^{-k^2 \frac{t}{2}}$
$e^{-k^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{e^{k^2 \frac{t}{2}}} \le \frac{1}{k^2 \frac{t}{2}} \Rightarrow |(\partial_t u_n - \partial_t u_m)(s,y)| \le \frac{2}{t} \sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^3} < \varepsilon$
$\overset{Satz\ 11.1}{\Rightarrow}$ $\partial_t u(t,x) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 t}}{k} \sin(kx)$
Genauso sieht man: $\partial_x u(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 t}}{k^2} \cos(kx)$
$\partial_x \partial_x u(t,x) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 t}}{k} \sin(kx)$
$\partial_t \partial_x u(t,x) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t} \cos(kx)$
$\partial_t \partial_t u(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k e^{-k^2 t} \sin(kx)$
$e^{-k^2 t} \le \frac{1}{k^2 t}, \quad k e^{-k^2 t} \le k \frac{2}{k^4 t^2} = \frac{2}{t^2} \frac{1}{k^3}$
Satz 11.1 $\Rightarrow u$ C^2 mit
$\partial_t u(t,x) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 t}}{k} \sin(kx)$
$\partial_x \partial_X u(t,x) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2 t}}{k} \sin(kx)$
$\Rightarrow \partial_t u(t,x) = \partial_x \partial_x u(t,x)$
$u(0,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sin(kx) = f(x)$
$u(t,0) = u(t,\pi) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-t^2 \pi}}{k^3} \sin(0) = 0$
$\Rightarrow u$ löst $(*)$

Aufabe 2



a) Mit Aufgabe 3 von Blatt 1 erhält man
$a_0 = \pi$
$a_k = \begin{cases} 0 & , k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{k^2 \pi} & , k \text{ ungerade} \end{cases}$
$b_k = 0$

b) Idee: $u : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

$u(t,x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t)\sin(kx)$
Annahme: u löst $(*)$
$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx)$
$= u(0,x) = \frac{a_0(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0)\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(0)\sin(kx)$
Wie in Aufgabe 1 sieht man:
$\pi = a_0 = a_o(0), \quad b_k(0) = b_k = 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N}$
$\forall k \in \mathbb{N}: \quad a_k(0) = a_k = \begin{cases} 0 & ,k \textit{ gerade} \\ -\frac{4}{k^2\pi} & ,k \textit{ ungerade} \end{cases}$
Annahme: $u_{tt}(t,x) = \partial_t\partial_t u(t,x) = \frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k''(t)\cos(kx)$
$= u_{xx}(t,x) = \partial_x\partial_x u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-k^2)a_k(t)\cos(kx)$
$\Rightarrow \frac{a_0''(t)}{2} = 0, \quad a_k''(t) = (-k^2)a_k(t)$
$\Rightarrow \exists \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0$ mit $a_0(t) = \lambda_0 + \mu_0 t, \quad \pi = a_0(0) = \lambda_0 \quad \Rightarrow$ $a_0(t) = \pi + t\mu_0$
$a_k(t) = \lambda_k\sin(kt) + \mu_k\cos(kt) \quad \Rightarrow a_k(0) = \mu_k)a_k$
$\Rightarrow u(t,x) = \frac{\pi+t}{2}\mu_0 - \frac{4}{t}\sum_{k=1}^{\infty}\cos((2k-1)x)\big(\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)t)\big) + \sum_{k=1}^{\infty}\cos(kx)\cdot$ $\lambda_k\sin(kt)$
$0 = \partial_t u(0,x) = \frac{\mu_0}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k k\cos(kx)$
$\Leftrightarrow \mu_0 = 0, \quad \lambda_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow u(t,x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)t)$

c) i) Für $t \in \mathbb{R}$ fest:
$x \mapsto u(t,x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)t)}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)$
$g \in \mathbb{L}^2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\cos((2k-1)t)}{(2k-1)^2}\right|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} < \infty$

ii) (x,t) fest, $\delta > 0$
$u_n : [t-\delta, t+\delta]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R},\ u_n(s,y) := \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)t)}{(2k-1)^2}\cos((2k-$ $1)x)$
$n \le m: \quad |(u_n - u_m)(s,y)| \le \frac{4}{\pi}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{(2k-1)^2} < \varepsilon$
(bel. $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall mn, \ge n_0$)
Satz 11.1 $\Rightarrow u$ stetig.

iii) u ist partiell nicht diffbar, weder nach x noch nach t.
$\partial_t u_n(s,y) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin((2k-1)t)}{(2k-1)}\cos((2k-1)x) \sim \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\xrightarrow[k\to\infty]{}\infty$
genauso $\partial_x u(s,y)$.

Aufabe 3

a) $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$
$P_2(x) = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

b) $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$
$P_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x$
$P_2(x)\sqrt{\frac{2}{\pi}}(2x^2 - 1)$

c) $P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x - 1$
$P_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{11}}(x^2 - 4x + 2)$

d) $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
$P_1(x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}}$
$P_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2\pi}}(x^2 - 1)$

Aufabe 4

a) I kompakt, $\omega > 0$. Z.z.: $\mathbb{L}^2(I, \omega, \mathbb{C}) = \mathbb{L}(I, \mathbb{C})$
$\mathbb{L}^2(I, \omega, \mathbb{C}) = \{f : I \to \mathbb{C} \big|\ f\ mbar\ und\ \omega|f|^2 \in \mathbb{L}^1\}$
$\mathbb{L}^2(I, \mathbb{C}) = \{f : I \to \mathbb{C} \big|\ f\ mbar\ und\ |f|^2 \in \mathbb{L}^1\}$
I kompakt, ω stetig $\Rightarrow \exists \underbrace{\max \omega}_{=:c},\ \underbrace{\min \omega}_{=:d}$
$\omega|f|^2 \in \mathbb{L}^1,\ f$ messbar $\Rightarrow |f|^2$ mbar, $|f|^2 \leq \frac{1}{d} \cdot \underbrace{\omega|f|^2}_{\in \mathbb{L}^1} \in \mathbb{L}^1$
$\Rightarrow |f|^2 \in \mathbb{L}^1$
$|f|^2 \in \mathbb{L}^1 \quad \Rightarrow |f|^2$ mbar, ω stetig $\Rightarrow \omega$ mbar
$\Rightarrow \omega|f|^2$ mbar, $\omega|f|^2 \leq \underbrace{c|f|^2}_{\in \mathbb{L}^1} \in \mathbb{L}^1$
$\Rightarrow \omega|f|^2 \in \mathbb{L}^1$

b) – $I = [1, \infty),\quad \omega(x) = \frac{1}{x},\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\quad x \in [1, \infty)$

$$\underbrace{|f(x)|^2 = (f(x))^2 = \frac{1}{x} \notin \mathbb{L}^1}_{\Rightarrow f \notin \mathbb{L}^2(I, \mathbb{C})},\quad \underbrace{\omega(x)|f(x)|^2 = \frac{1}{x^2} \in \mathbb{L}^1}_{\Rightarrow f \in \mathbb{L}^2(I, \omega, \mathbb{C})}$$

– $I = [-1, 1],\quad \omega(x) = |x|,\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & , x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$
$|f(x)|^2 = \frac{1}{|x|} \notin \mathbb{L}^1(I, \mathbb{C}) \quad \Rightarrow f \notin \mathbb{L}^2$
$\omega(x)|f(x)|^2 = \frac{|x|}{|x|} = 1 \in \mathbb{L}^1(I, \mathbb{C}) \quad \Rightarrow f \in \mathbb{L}^2(I, \omega, \mathbb{C})$