

Aufgabe 1

$$y' = x - 2y, \quad y(0) = 0, \quad h = 0,05, \quad x \in [0, 0,5]$$

$$x_1 = 0 + 0,05 = 0,05, \quad x_2 = 0,05 + 0,05 = 0,1$$

$$y(x_1) = y(x_0) + h f(x_1, y(x_1))$$

$$f = x - 2y \Rightarrow y(x_1) = y(x_0) + h(x_1 - 2y(x_1))$$

$$\Rightarrow (1 + 2h)y(x_1) = y(x_0) + hx_1$$

$$\Rightarrow 1,1 \cdot y(0,05) = y(0,00) + 0,05 \cdot 0,05$$

$$\Rightarrow y(x_1) = 0,002273$$

$$y(x_2) = y(x_1) + h f(x_2, y(x_2))$$

$$\Rightarrow y(x_2) = 0,002273 + h \cdot (0,1 - 2 \cdot y(x_2))$$

$$\Rightarrow (1 + 2h)y(x_2) = 0,002273 + 0,005$$

$$\Rightarrow y(x_2) = 0,006612$$

$$y_{k+3} = y_{k+1} + h \left(\frac{7}{3} f(x_{k+2}, y_{k+2}) - \frac{2}{3} f(x_{k+1}, y_{k+1}) + \frac{1}{3} f(x_k, y_k) \right)$$

$$\Rightarrow y_3 = y_1 + h \left(\frac{7}{3} (x_2 - 2y_2) - \frac{2}{3} (x_1 - 2y_1) + \frac{1}{3} (x_0 - y_0) \right)$$

$$\Rightarrow y_3 = 0,002273 + 0,05 \left(\frac{7}{3} (0,1 - 2 \cdot 0,006612) - \frac{2}{3} (0,05 - 2 \cdot 0,002273) + \frac{1}{3} (0 - 0) \right) = 0,01088$$

$$\Rightarrow y_4 = 0,01944, \quad y_5 = 0,02685, \quad y_6 = 0,03911$$

$$y_7 = 0,04887, \quad y_8 = 0,06441, \quad y_9 = 0,07579$$

$$y_{10} = 0,0944$$

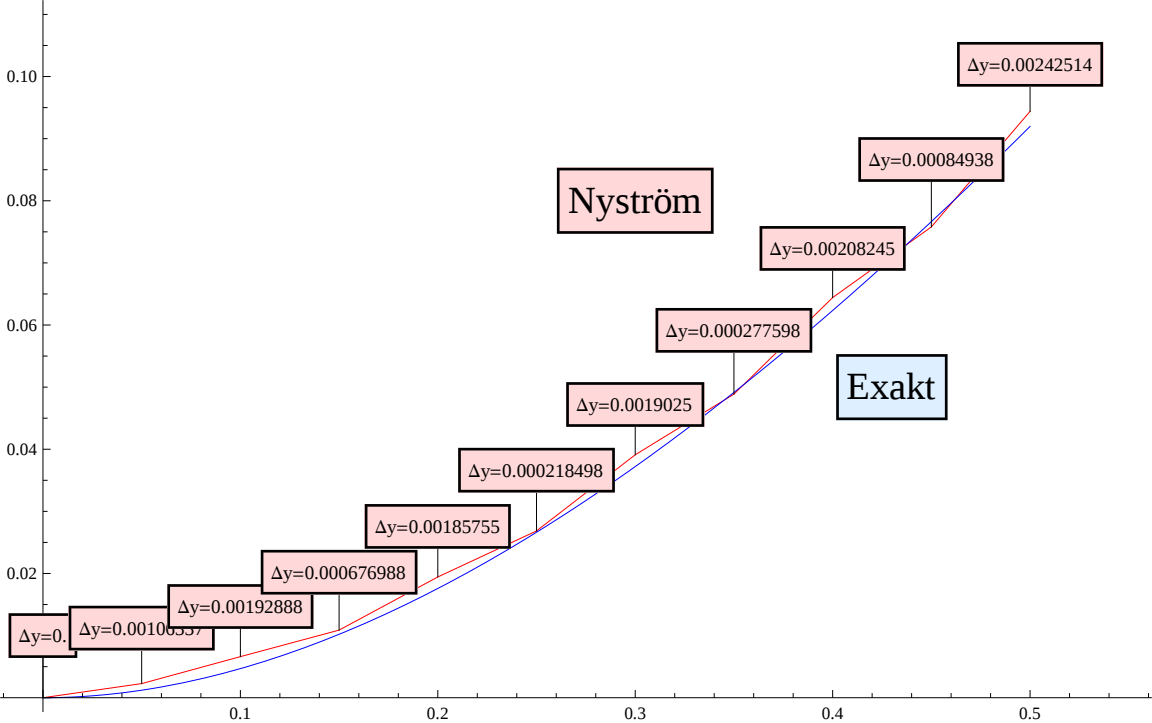
Vergleich zu $\frac{1}{4}(2x + e^{-2x} - 1)$:

Die Näherung ist in den meisten Punkten sehr nahe an der exakten Lösung

($\max(\Delta y) = 0,0021$), und in den meisten Punkten höher als die exakte Lösung.

Konkreter Vergleich & Plot: siehe Rückseite!





Aufgabe 2

$$y' = (1 - 2x)y, \quad y(1) = 2, \quad x \in [1, 1.5], \quad h = 0.1$$

$$u_1 = f(x_k, y_k), \quad u_2 = f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} u_1)$$

$$y_{k+1} = y_k + h u_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_1 &= y_0 + h u_2 = y_0 + h(1 - 2(x_0 + \frac{h}{2}))(y_0 + \frac{h}{2} u_1) \\ &= y_0 (1 - 2(x_0 + \frac{h}{2}))(y_0 + \frac{h}{2} (1 - 2x_0)y_0) \\ &= 2 \cdot (1 - 2(1 + \frac{0.1}{2}))(2 + \frac{0.1}{2} (1 - 2 \cdot 1) \cdot 2) \\ &= 1.791 \end{aligned}$$

Adams Moulton mit $s=2$:

$$y_{k+2} = y_{k+1} + h \left(\frac{5}{12} f(x_{k+2}, y_{k+2}) + \frac{8}{12} f(x_{k+1}, y_{k+1}) - \frac{1}{12} f(x_k, y_k) \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_2 &= y_1 + h \left(\frac{5}{12} (1 - 2x_2)y_2 + \frac{8}{12} (1 - 2x_1)y_1 - \frac{1}{12} (1 - 2x_0)y_0 \right) \\ &= 1.791 + 0.1 \left(\frac{5}{12} (1 - 1.2)y_2 + \frac{8}{12} (1 - 2 \cdot 1.1) \cdot 1.791 - \frac{1}{12} (1 - 2 \cdot 1) \cdot 2 \right) \\ &= 1.791 + 0.1 (-1.26673 - 0.5833 y_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_2 = 1.5727$$

$$y_3 = 1.3535, \quad y_4 = 1.1479, \quad y_5 = 0.9442$$

Vergleich mit $2e^{x-x^2}$:

Die genäherten Werte sind fast identisch zu denen der exakten Funktion. Im Plot erscheinen sie deckungsgleich, daher hier die Abstandstabelle:

$$\Delta y_0 = 0, \quad \Delta y_1 = 0.00067, \quad \Delta y_2 = 0.00061,$$

$$\Delta y_3 = 0.00057, \quad \Delta y_4 = 0.00055, \quad \Delta y_5 = 0.00052$$

Aufgabe 3

$$\sum_{m=0}^3 a_m y_{u+m} = h \sum_{m=0}^3 b_m f(x_{u+m}, y_{u+m})$$

Implizit: (3-Schritt-Milne):

$$a_0 = a_2 = 0 \neq b_3 \Rightarrow a_1 + a_3 \stackrel{!}{=} 0 \stackrel{!}{=} a_1 + 1 \Rightarrow a_1 = -1$$

„Das Verfahren hat Konsistenzordnung p “ ist äquivalent zu $L(t^m, 1) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^3 (a_i i^m - b_i m i^{m-1}) \stackrel{!}{=} 0$ für $m=0, 1, \dots, p$!

$$\text{Ordnung } p=1: \frac{1}{h} \left(\sum_{i=0}^3 a_i i^1 - b_i \cdot 1 \cdot i^0 \right) = \frac{1}{h} (a_1 + 3a_3 - b_0 - b_1 - b_2 - b_3) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \text{wähle } b_i \text{ so, dass } b_0 = 2 - b_1 - b_2 - b_3 \text{ und } b_3 \neq 0.$$

$$\text{Ordnung } p=2: \frac{1}{h} \left(\sum_{i=0}^3 a_i i^2 - b_i \cdot 2 \cdot i^1 \right) = \frac{1}{h} (a_1 + 9a_3 - 2b_1 - 4b_2 - 6b_3) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow b_1 = 4 - 2b_2 - 3b_3 \text{ und } b_3 \neq 0$$

$$\text{Ordnung } p=3: \frac{1}{h} \left(\sum_{i=0}^3 a_i i^3 - b_i \cdot 3 \cdot i^2 \right) = \frac{1}{h} (a_1 + 27a_3 - 3b_1 - 12b_2 - 27b_3) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{26}{3} - 4b_2 - 9b_3 \text{ und } b_3 \neq 0$$

$$\text{Ordnung } p=4: \frac{1}{h} \left(\sum_{i=0}^3 a_i i^4 - b_i \cdot 4 \cdot i^3 \right) = \frac{1}{h} (a_1 + 81a_3 - 4b_1 - 32b_2 - 108b_3) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow b_1 = 20 - 8b_2 - 27b_3$$

Da $L(t^m, 1) \stackrel{!}{=} 0$ für alle $m=0, \dots, p$ gelten muss, sind $b_0, \dots, b_3$ nun über ein LGS bestimmt:

$$\begin{pmatrix} b_0 = 2 - b_1 - b_2 - b_3 \\ b_1 = 4 - 2b_2 - 3b_3 \\ b_1 = \frac{26}{3} - 4b_2 - 9b_3 \\ b_1 = 20 - 8b_2 - 27b_3 \end{pmatrix} \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{pmatrix} b_0 = 0 \\ b_1 = \frac{2}{3} \\ b_2 = \frac{4}{3} \\ b_3 = \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ordnung } p=5: \frac{1}{h} \sum_{i=0}^3 a_i i^5 - b_i \cdot 5 \cdot i^4 = \frac{1}{h} (a_1 + 243a_3 - 5b_1 - 80b_2 - 405b_3) \stackrel{!}{=} 0$$

Nun sind b_i bereits bestimmt:

$$L(t^5, 1) = \frac{1}{h} \left(-1 + 243 - \frac{5}{3} - 80 \cdot \frac{4}{3} - 405 \cdot \frac{2}{3} \right) = -\frac{4}{3}h \neq 0$$

$\Rightarrow$ Gleichung nur bis $p=4$ erfüllt $\Rightarrow$ Verfahren hat Ordnung 4.

$$y_{u+3} = y_{u+1} + h \left(\frac{1}{3} f(x_{u+1}, y_{u+1}) + \frac{4}{3} f(x_{u+2}, y_{u+2}) + \frac{1}{3} f(x_{u+3}, y_{u+3}) \right)$$

$\Rightarrow$

Explizit: (3-Schritt-Runge-Kutta) ($b_3 \stackrel{!}{=} 0$)

Wieder gilt $a_0 = a_2 = b_3 = 0$ und $a_3 = 1 \Rightarrow a_1 = -1$
 $\frac{3}{\text{diesmal anders}}$

Wieder zu testen: $L(t^m, 1) \stackrel{!}{=} 0$, $m = 0, 1, \dots, p$
für Konsistenzordnung p .

$$p = 1: \frac{1}{h} \sum_{i=0}^3 (a_i i^1 - b_i \cdot 1 \cdot i^0) = \frac{1}{h} (a_1 + 3a_3 - b_0 - b_1 - b_2 - 0) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow b_0 = 2 - b_1 - b_2$$

$$p = 2: \frac{1}{h} \sum_{i=0}^3 (a_i i^2 - b_i \cdot 2 \cdot i^1) = \frac{1}{h} (a_1 + 9a_3 - 2b_1 - 4b_2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow b_1 = 4 - 2b_2$$

$$p = 3: \frac{1}{h} \sum_{i=0}^3 (a_i i^3 - b_i \cdot 3 \cdot i^2) = \frac{1}{h} (a_1 + 27a_3 - 3b_1 - 12b_2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{26}{3} - 4b_2$$

LGS f. $b_0, \dots, b_3$ gegeben:

$$\left| \begin{array}{l} b_0 = 2 - b_1 - b_2 \\ b_1 = 4 - 2b_2 \\ b_1 = \frac{26}{3} - 4b_2 \\ b_3 = 0 \end{array} \right| \quad (\Leftrightarrow) \quad \left| \begin{array}{l} b_0 = \frac{1}{3} \\ b_1 = -\frac{2}{3} \\ b_2 = \frac{7}{3} \\ b_3 = 0 \end{array} \right|$$

$$p = 4: \frac{1}{h} \sum_{i=0}^3 (a_i i^4 - b_i \cdot 4 \cdot i^3) = \frac{1}{h} (a_1 + 81a_3 - 4b_1 - 32b_2) \stackrel{!}{=} 0$$

$$= \frac{1}{h} (-1 + 81 + 4 \cdot \frac{2}{3} - 32 \cdot \frac{7}{3}) = 8 \neq 0$$

$\Rightarrow L(t^m, 1) \stackrel{!}{=} 0$ nur bis $m = 1, \dots, 3$ gültig

$\Rightarrow$ Verfahren hat Ordnung $p = 3$.

$$y_{k+3} = y_{k+1} + h \left(\frac{1}{3} f(x_k, y_k) - \frac{2}{3} f(x_{k+1}, y_{k+1}) + \frac{7}{3} f(x_{k+2}, y_{k+2}) \right)$$