

NUMERIK II IM SOMMERSEMESTER 2013

Aufgabenblatt 3

(Korrigierte Fassung vom 08. Mai)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Schreiben Sie die Anfangswertaufgabe

$$y''' - x^2 y'' + 4y' - xy = 3$$

mit

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 2$$

in ein System von DGL erster Ordnung um und berechnen Sie mit der Trapezregel

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

und der Schrittweite $h = 1$ die Näherungswerte für $y(2)$, $y'(2)$ und $y''(2)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Berechnen Sie für die 4-Schritt Adams-Bashforth-Methode die Koeffizienten b_m , indem Sie $f(x, y(x))$ in der Integralgleichung

$$y(x_{k+4}) = y(x_{k+3}) + \int_{x_{k+3}}^{x_{k+4}} f(x, y(x)) \, dx$$

durch das Interpolationspolynom 3. Grades in Lagrange-Form

$$p_3(x) = \sum_{j=0}^3 f(x_{k+j}, y_{k+j}) \ell_{k+j}(x)$$

annähern, wobei

$$\ell_i(z) = \prod_{l=0, l \neq i}^3 \frac{z - z_l}{z_i - z_l} \quad \text{für } i = 0, \dots, 3$$

ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Konstruieren Sie ein implizites 2-stufiges Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4.

Abgabe: Dienstag, 14.05.2013, bis 12:00 Uhr in/vor Raum 149 HRZ oder in der Vorlesung.

1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 3 22.5.12

1.1 Aufgabe 1

$$y''' = x^2 y'' - 4y' + xy + 3$$

$$y(1) = 1$$

$$y'(1) = 0$$

$$y''(1) = 2$$

$$\Rightarrow y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 2$$

$$\Rightarrow z = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} \Rightarrow z' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ x^2 y'' - 4y' + xy + 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_{p_2} & -4 & x_{p_2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = f(x_{p_2}, y_{p_2})$$

$$y_1 = (a, b, c)^T, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)) = \begin{pmatrix} 0.5b + 1.5 \\ 0.5c + 2 \\ a - 2b + 2c + 4.5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5b + 1.5 \\ 0.5c + 2 \\ a - 2b + 2c + 4.5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c = -12 = y''(2)$$

$$\Rightarrow b = -4 = y'(2)$$

$$\Rightarrow a = -0.5 = y(2)$$

1.2 Aufgabe 2

$$b_j = \frac{1}{h} \int_{x_{k+3}}^{x_{k+4}} l_j(x) dx = \frac{1}{h} \int_{3h}^{4h} l_j(x) dx$$

$$\Rightarrow b_0 = \frac{1}{h} \int_{3h}^{4h} \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \frac{x-x_3}{x_0-x_3} dx = -\frac{1}{4h^4} \int_{3h}^{4h} x^3 - 3hx^2 - 3hx^2 + 2h^2x + 2h^2x - 6h^3 dx$$

$$= -\frac{1}{64h^4} \left(\frac{x^4}{4} - 2hx^3 + \frac{11}{2}h^2x^2 - 6h^3x \right)_{3h}^{4h} = -\frac{3}{8}$$

$$b_1 = \frac{37}{24}, \quad b_2 = -\frac{59}{24}, \quad b_3 = \frac{55}{24}$$

Alternativ:

$$g(z, 0, 1) = \left. \frac{(1-z)^{-t}}{\ln(1-z)} \right|_{t=0}^{t=1} = \dots = \frac{z}{(1-z)\ln(1-z)}$$

Taylorentwicklung:

$$g(z, 0, 1) = (1-z) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j+1} = \dots = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j(j+1)}$$

Koeffizientenvergleich:

$$1 = -\frac{z}{(1-z)\ln(1-z)} g(z, 0, 1) = (b_0^* + b_1^*z + \dots)(1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2 \cdot 3}z^2 - \dots)$$

$$\begin{aligned}
&= b_0^* + z(b_1^* - \tfrac{1}{2}b_0^*) + z^2(b_2^* - \tfrac{1}{2}b_1^* - \tfrac{1}{2 \cdot 3}b_3^*) \\
&\Rightarrow b_0^* = 1 \\
b_i^* &= \sum_{j=0}^{i-1} \frac{b_j^*}{(i-j)(i+1-j)}, \quad i = 1, 2, \dots \\
b_1^* &= \tfrac{1}{2}b_0^* = \tfrac{1}{2} \\
b_2^* &= \tfrac{1}{2}b_0^* + \tfrac{1}{6}b_1^* = \tfrac{3}{12} \\
b_3^* &= \tfrac{1}{2}b_2^* + \tfrac{1}{6}b_1^* + \tfrac{1}{12}b_0^* = \tfrac{3}{8}
\end{aligned}$$

Betrachte:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \sum_{i=0}^3 b_i^* \nabla^i f_{k+m} \\
\nabla^0 f_{k+m} &= f_{k+3} \\
\nabla^1 f_{k+m} &= f_{k+3} - f_{k+2} \\
\nabla^2 f_{k+m} &= f_{k+3} - 2f_{k+2} + f_{k+1} \\
\nabla^3 f_{k+m} &= f_{k+3} - 3f_{k+2} + f_{k+1} - f_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Damit gilt } \varphi &= f_{k+3} + \tfrac{1}{2}(f_{k+3} - f_{k+2}) + \tfrac{5}{12}(f_{k+3} - 2f_{k+2} + f_{k+1}) + \tfrac{3}{8}(f_{k+3} - 3f_{k+2} + \\
&\quad 3f_{k+1} - f_k) \\
&= -\tfrac{3}{8}f_k + \tfrac{37}{24}f_{k+1} - \tfrac{59}{24}f_{k+2} + \tfrac{55}{24}f_{k+3} \\
\text{Gilt: } &-\tfrac{3}{8} + \tfrac{37}{24} - \tfrac{59}{24} + \tfrac{55}{24} = 1
\end{aligned}$$

1.3 Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
p_2(c) &= 2 - 12c + 12c^2 \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow c_1 &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{6}, \quad c_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{6} \\
\text{Kollokationsverfahren liefert:} \\
L_1(x) &= \frac{x-c_2}{c_1-c_2} = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2} \\
L_2(x) &= \frac{x-c_1}{c_2-c_1} = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2} \\
b_1 &= \int_0^1 L_1(x) dx = \tfrac{1}{2} \\
b_2 &= \int_0^1 L_2(x) dx = \tfrac{1}{2} \\
a_{11} &= \int_0^{c_1} L_1(x) dx = \tfrac{1}{4} \\
a_{12} &= \int_0^{c_1} L_2(x) dx = \tfrac{1}{4} - \tfrac{\sqrt{3}}{6} \\
a_{21} &= \int_0^{c_2} L_1(x) dx = \tfrac{1}{4} + \tfrac{\sqrt{3}}{6} \\
a_{22} &= \int_0^{c_2} L_2(x) dx = \tfrac{1}{4} \\
\begin{array}{c|cc}
\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{6} & \tfrac{1}{4} & \tfrac{1}{4} - \tfrac{\sqrt{3}}{6} \\
\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{6} & \tfrac{1}{4} + \tfrac{\sqrt{3}}{6} & \tfrac{1}{4} \\
\hline
& \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2}
\end{array}
\end{aligned}$$