Numerik 2 Blatt 5 Julian Bergmann

Aufgabe 1

Konsistenzordnung $p \Leftrightarrow L(t^m, 1) = \frac{1}{h}\left(\sum_{i=0}^{s}(a_i i^m - b_i m i^{m-1})\right) = 0$, $m = 1, \dots, p$

$\sum_{i=0}^{2} a_i y_{k+m} = h \sum_{m=0}^{2} b_m f(x_{k+m}, y_{k+m})$

$\Leftrightarrow y_{k+2} = -9 y_{k+1} + 10 y_k + \frac{h}{2}\left(13 f(x_{k+1}, y_{k+1}) + 9 f(x_k, y_k)\right)$

$\Rightarrow \underbrace{-10}_{a_0} y_k + \underbrace{9}_{a_1} y_{k+1} + \underbrace{y_{k+2}}_{a_2 = 1} = h\left(\underbrace{\frac{9}{2}}_{b_0} f(x_k, y_k) + \underbrace{\frac{13}{2}}_{b_1} f(x_{k+1}, y_{k+1})\right)$, $b_2 = 0$

$p = 1: \sum_{i=0}^{2}(a_i i^1 - b_i 1 i^{1-1}) = a_1 + a_2 \cdot 2 - b_0 - b_1 = 9 + 1 \cdot 2 - \frac{9}{2} - \frac{13}{2} = 0$

$p = 2: \sum_{i=0}^{2}(a_i i^2 - b_i \cdot 2 \cdot i^1) = a_1 + 4a_2 - 2b_1 = 9 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{13}{2} = 0$

$p = 3: \sum_{i=0}^{2}(a_i i^3 - b_i \cdot 3 \cdot i^2) = a_1 + 8a_2 - 3b_1 = 9 + 8 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{13}{2} = -2{,}5 \neq 0$

$\Rightarrow$ Konsistenzordnung 2

Dahlquist:

lin. Mehrschrittverfahren ist konvergent
$\Leftrightarrow$ $\varrho(\xi)$ erfüllt Wurzelbedingung und Verfahren konsistent.

$\varrho(\xi) = \sum_{i=0}^{s} a_i \xi^i = -10 + 9\xi + 1\xi^2$

Wurzelbedingung:

Alle Nullstellen betragsm. ≤ 1 und
alle NS $= 1$ einfach

$\varrho(\xi) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \xi_{1,2} = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} + 10} = -\frac{9}{2} \pm \frac{11}{2} = \{1, -10\}$

$|-10|$ nicht ≤ 1 $\Rightarrow$ Wurzelbed. nicht erfüllt

$\Rightarrow$ Verfahren nicht konvergent!

Numerik 2 Blatt 5 Julian Bergmann

Aufgabe 2

$$y_{k+2} - \frac{3}{2} y_{k+1} + \frac{1}{2} y_k = h\left(f_{k+1} - \frac{1}{2} f_k\right)$$

a) $y' = 1,\ y(0) = 1 \quad \Rightarrow y(x) = x + 1$

$\Rightarrow y_0 = 1,\ y_1 = 1 + h$

$f_k = f_{k+1} = 1 \quad \Rightarrow h\left(f_{k+1} - \frac{1}{2} f_k\right) = h/2$

$\Rightarrow y_{k+2} - \frac{3}{2} y_{k+1} + \frac{1}{2} y_k = h/2$

Allg.: $\varrho(\xi) = \xi^2 - \frac{3}{2}\xi + \frac{1}{2} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \xi_{1,2} \in \{\frac{1}{2}, 1\}$

$\Rightarrow y_k^{(h)} = A\, 1^k + B \frac{1}{2}^k = A + B \frac{1}{2}^k$

Spez: $y_k^{(p)} = ck$

$\Rightarrow c(k+2) - \frac{3}{2} c(k+1) + \frac{1}{2} ck - \frac{h}{2} = \frac{1}{2} c - \frac{h}{2} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow c = h$

$\Rightarrow y_k = A + B \cdot \frac{1}{2}^k + hk$

$y_0 = 1 = A + B \qquad A = 1 - B \qquad A = 1$

$y_1 = 1 + h = A + \frac{1}{2} B + h \iff 1 - B + \frac{1}{2} B = 1 - \frac{1}{2} B = 1 \iff B = 0$

$\Rightarrow y_k = 1 + hk = 1 + x$

b) $y' = 2x,\ y(0) = 1 \Rightarrow y(x) = x^2 + 1,\ y_0 = 1,\ y_1 = 1 + h^2$

$f_k = 2x_k,\ h(f_{k+1} - f_k) = h\left(2(x+h) - \frac{1}{2} \cdot 2x\right) = h(x + 2h)$

$\Rightarrow y_{k+2} - \frac{3}{2} y_{k+1} + \frac{1}{2} y_k = h(x + 2h) = h(kh + 2h)$

$y_k^{(h)} = A + B \cdot \frac{1}{2}^k$

$y_k^{(p)} = ch(kh + 2h)$

$\Rightarrow ch(kh + 4h) - \frac{3}{2} ch(kh + 3h) + \frac{1}{2} ch(kh + 2h) - h(kh + 2h) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \qquad c = 2(2 + k)$

$\Rightarrow y_k^{(p)} = h \cdot 2(2+k)(kh + 2h) = 8h^2 + 8h^2 k + 2h^2 k^2$

$y_k = A + \frac{1}{2}^k B + 8h^2 + 8h^2 k + 2h^2 k^2$

$y_0 = 1 = A + B + 8h^2 \qquad A = 1 - 26h^2$

$y_1 = 1 + h^2 = A + \frac{1}{2} B + 8h^2 + 8h^2 + 2h^2 \iff B = 18h^2$

$\Rightarrow y_k = 1 - 18h^2 + 18h^2 \cdot \frac{1}{2}^k + 8h^2 k + 2h^2 k^2$

Vergleich: in a) entspricht die Näherung der exakten Lösung, in b) ist die Näherung stark Schrittweiten-abhängig, komplizierter und weicht von der exakten Lösung ab.

Numerik 2 Blatt 5 Julian Bergmann

Aufgabe 3

a) $a_{n+4} - 3a_{n+3} - 6a_{n+2} + 28a_{n+1} - 24a_n = 0$

$\Rightarrow \; \varrho(\xi) = -24 + 28\xi - 6\xi^2 - 3\xi^3 + \xi^4 = (x-2)^3(x+3) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \; \xi_{1,2,3} = 2, \quad \xi_4 = -3$

$\Rightarrow \; a_k = (Ak^2 + Bk + C)\,2^k + (\;D\;)\cdot(-3)^k$

b) $a_1 = -3, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 57, \quad a_4 = 181$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 2A + 2B + 2C - 3D = -3\\
a_2 &= 16A + 8B + 4C + 9D = 1\\
a_3 &= 72A + 24B + 8C + 27D = 57\\
a_4 &= 256A + 64B + 16C + 81D = 181
\end{aligned}
$$

Mathematica:

```
Table[(Ak^2+Bk+C)·2^k+D(-3)^k ==
    {-3, 1, 57, 181}[[k]], {k,1,4}]//Solve
```

$\Rightarrow \; A = 1, \quad B = 0, \quad C = -3, \quad D = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \; a_k = (k^2 - 3)\,2^k - \frac{1}{3}\cdot(-3)^k$