

Mathematik für Physiker

Lineare Algebra

Skript zur Vorlesung von Prof. Dr. Lani-Wayda
Mitgeschrieben und getext von Julian Bergmann

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Algebraische Grundstrukturen | 1 |
| 1.1 | Definition | 1 |
| 1.2 | Definition | 1 |
| 1.3 | Bemerkung | 1 |
| 1.4 | Beispiel: Permutationsgruppen | 1 |
| 1.5 | Definition | 2 |
| 1.6 | Definition | 2 |
| 1.7 | Bemerkung | 3 |
| 1.8 | Definition | 3 |
| 1.9 | Definition/Bemerkung | 3 |
| 1.10 | Definition: Untergruppen, -räume, Normalteiler | 4 |
| 1.11 | Bemerkung | 4 |
| 1.12 | Definition: affiner Unterraum | 4 |
| 1.13 | Beispiel | 4 |
| 2 | Homomorphismen, lineare Abbildungen | 5 |
| 2.1 | Definition | 5 |
| 2.2 | Definition | 5 |
| 2.3 | Definition | 5 |
| 2.4 | Definition/Bemerkung | 5 |
| 2.5 | bemerkung | 5 |
| 2.6 | Bezeichnung | 6 |
| 3 | Lineare Unabhängigkeit, Basen, Dimensionen | 6 |
| 3.1 | Definition | 6 |
| 3.2 | Definition | 6 |
| 3.3 | Bemerkung | 6 |
| 3.4 | Satz | 7 |
| 3.5 | Hilfssatz | 7 |
| 3.6 | Lemma | 7 |
| 3.7 | Austauschlemma | 8 |
| 3.8 | Satz | 8 |
| 3.9 | Folgerung | 9 |
| 3.10 | Satz | 9 |
| 4 | Lineare Abbildungen und Matrizen | 10 |
| 4.1 | Bemerkung/Definition | 10 |
| 4.2 | Definition: Matrixmultiplikation | 10 |
| 4.3 | Satz: Kompositionen linearer Abbildungen und Matrixmultiplikationen | 11 |
| 4.4 | Bemerkung | 11 |
| 4.5 | Bemerkung | 11 |
| 4.6 | Satz: Invertierbare Matrizen, Basisvektoren | 12 |
| 4.7 | Rang und Transposition | 13 |
| 5 | lineare Gleichungssysteme, Matrizenumformung | 13 |
| 5.1 | Dimensionsformel | 13 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 5.2 | Bemerkung | 14 |
| 5.3 | Zeilenumformungen und Elementarmatrizen | 15 |
| 5.4 | Satz | 16 |
| 5.5 | Gaußsches Eliminationsverfahren | 17 |
| 5.6 | Bemerkung: Variante | 18 |
| 6 | Determinanten | 18 |
| 6.1 | Definition/Bemerkung | 18 |
| 6.2 | Definition/Satz: Determinante und Leibniz-Formel | 18 |
| 6.3 | Bemerkung | 19 |
| 6.4 | Folgerung | 19 |
| 6.5 | Determinantenmultiplikationssatz | 20 |
| 6.6 | Spezialfälle von Determinanten | 20 |
| 6.7 | Definition/Bemerkung | 20 |
| 6.8 | Entwicklungssatz von Laplace | 21 |
| 6.9 | Cramersche Regel | 21 |
| 6.10 | Bemerkung | 22 |
| 7 | Summen und direkte Summen von Unterräumen | 22 |
| 7.1 | Definition | 22 |
| 7.2 | Satz | 22 |
| 7.3 | Satz | 23 |
| 8 | Eigenwerte und Eigenvektoren | 24 |
| 8.1 | Definition | 24 |
| 8.2 | Definition und Bemerkung | 24 |
| 8.3 | Bemerkung | 24 |
| 8.4 | Definition und Bemerkung: Charakteristisches Polynom | 24 |
| 8.5 | Bemerkung und Definition: Algebraische und geometr. Vielfachheit von EW | 25 |
| 8.6 | Definition und Satz: Diagonalisierbarkeit | 25 |
| 8.7 | Folgerung | 27 |
| 8.8 | Satz: jordansche Normalform | 27 |
| 8.9 | Bemerkung | 27 |
| 9 | Euklidische unitäre Vektorräume | 28 |
| 9.1 | Definition | 28 |
| 9.2 | Definition | 28 |
| 9.3 | Bemerkung | 29 |
| 9.4 | Cauchy-Schwarz-Ungleichung | 29 |
| 9.5 | Definition und Satz: Orthogonalität | 29 |
| 9.6 | Satz | 29 |
| 9.7 | Definition | 29 |
| 9.8 | Bemerkung | 30 |
| 9.9 | Folgerung | 30 |
| 9.10 | Satz | 30 |
| 10 | Adjungierte lineare Abb. | 30 |
| 10.1 | Definition und Bemerkung | 30 |
| 10.2 | Definition: spezielle Matrizen | 31 |
| 11 | Hauptachsentransformation | 31 |
| 11.1 | Satz | 31 |
| 11.2 | Folgerung | 31 |
| 11.3 | Satz | 32 |

1 Algebraische Grundstrukturen

1.1 Definition

Sei G eine Menge.

- Eine Verknüpfung in G ist die Abbildung $*$: $(a, b) \mapsto a * b$.
(Häufig benutzte Symbole: $+$, \cdot , \times , ...)
- Eine Verknüpfung $*$ in G heißt assoziativ, falls
 $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$.
- Ein Element $e \in G$ heißt links(rechts-)neutral, also
 $\forall a \in G : e * a = a$ (bzw. $a * e = a$).
 e neutral \Leftrightarrow rechts- und linksneutral.
- Die Verknüpfung $*$ habe ein neutrales Element e .
Ein Element $b \in G$ heißt links-(rechts-)invers zu a , falls
 $b * a = e$ ($a * b = e$).
 b invers zu $a \Leftrightarrow a * b = b * a = e$.

1.2 Definition

Eine Gruppe $(G, *)$ ist eine Menge G zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung $*$: $G \times G \rightarrow G$, sodass gilt:

- Es existiert ein neutrales Element $e \in G$,
- zu jedem $a \in G$, ein inverses Element $a^{-1} \in G$.

G heißt kommutativ, falls $*$ kommutativ (Abelsch) [z.B. $(\mathbb{Z}, +)$]

1.3 Bemerkung

- Damit $(G, *)$ Gruppe ist, genügt die Existenz eines links-/rechtsneutralen Elementes und links-/rechtsinversen Elementes.
- Das neutrale Element und die inversen Elemente in einer Gruppe sind eindeutig.
- Es gibt nichtkommutative Gruppen.
- Statt „ $a * b$ “ auch oft ab .

Beweis: Seien e_1, e_2 neutrale Elemente in der Gruppe G .

Dann $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$.

1.4 Beispiel: Permutationsgruppen

Eine Permutationsgruppe (von n Elementen) ist eine bijektive Abbildung

$$\varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

$\Sigma_n := \{\varphi | \varphi : \{1, \dots, n\} \leftrightarrow \text{ist bijektiv}\}$: Menge aller Permutationen von n Elementen.

Σ_n mit der Miteinanderausführung als Verknüpfung

$$((\varphi \circ \psi)(j) = \varphi(\psi(j))) \text{ für } j \in \{1, \dots, n\}, \text{ falls } \varphi, \psi \in \Sigma_n$$

ist eine Gruppe.

(Neutrales Element: id (identische Abbildung); Inverses Element zu $\varphi \in \sum_n$ ist die inverse Abbildung φ^{-1})

Für $n \geq 3$ ist \sum_n nicht kommutativ.

Definition: Sei $n \geq 2$. $\varphi \in \sum_n$ heißt Transposition falls

$i, j \in \{1, \dots, n\}$ existiert,

$i \neq j$ mit $\varphi(i) = j, \varphi(j) = i$ und

$v, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j\} : \varphi(k) = k$.

Schreibweise: T_{ij}

Beispiele: 123 Start $T_{23} \circ T_{12}$
 231 Ergebnis $T_{12} \circ T_{23}$
 312 Ergebnis \Rightarrow nicht kommutativ

1.5 Definition

Ein Ring $(R, +, \cdot)$ ist eine Menge mit Verknüpfungen $+$, \cdot , so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- 1) $(R, +)$ ist kommutative Gruppe
- 2) \cdot ist assoziativ
- 3) Es gelten die Distributivgesetze: $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = (b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$

R heißt kommutativ, falls \cdot kommutativ.

R heißt „Ring mit Eins“, falls \cdot ein neutrales Element hat. (Schreibweise oft „1“)

R heißt „nullteilerfrei“, falls gilt $\forall a, b \in R/\{0\} : a \cdot b \neq 0$ (Hierbei ist „0“ das neutrale Element bezüglich „+“).

Bemerkung:

In einem Ring $(R, +, \cdot)$ gilt:

- a) $\forall r \in R : 0 \cdot r = r \cdot 0 = 0$
- b) Falls R mindestens 2 Elemente und ein Einselement 1 hat, so ist $0 \neq 1$

Beweis:

a)

$$0 \cdot r = (0 + 0) \cdot r = (0 \cdot r) + (0 \cdot r) \quad \text{addiere } -0 \cdot r$$

$$0 \cdot r + (-0 \cdot r) = (0 \cdot r) + (0 \cdot r) + (-0 \cdot r)$$

$$0 = 0 \cdot r \quad \text{analog } r \cdot 0 = 0$$

- b) Sei $a \in R/\{0\}$; $0 = 0 \cdot a$ (nach a)) $\neq a = 1 \cdot a$ somit $0 \neq 1$.

1.6 Definition

Ein Körper $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge K mit min. 2 Elementen und Verknüpfungen $+$, \cdot , so dass gilt:

- 1) $(K, +, \cdot)$ ist kommutativer Ring mit Eins
- 2) Zu jedem $a \in K/\{0\}$ ex. ein inverses Element a^{-1} bzgl. \cdot (Gleichbedeutend: $K/\{0\}$ ist Gruppe mit d. Verkn. „ \cdot “)

1.7 Bemerkung

Falls $(K, +, \cdot)$ ein Körper, so ist für $a, b \in K/\{0\}$ auch $a \cdot b \neq 0$

Dann $K/\{0\}$ mit der auf $K/\{0\}$ eingeschriebenen „Multiplikation“

$$\begin{array}{l} \cdot \\ \left. \begin{array}{l} (K/\{0\}) \times (K/\{0\}) \\ (K/\{0\}) \times (K/\{0\}) \end{array} \right\} : (K/\{0\}) \times (K/\{0\}) \\ (a, b) \mapsto a \cdot b \end{array}$$

eine kommutative Gruppe.

1.8 Definition

Sei $(k, +, \cdot)$ ein Körper. Sei V Menge und seien

$\oplus: V \times V \rightarrow V$ („Vektoraddition“)

$\odot: k \cdot V \rightarrow V$ („Skalarmultiplikation“)

Abbildungen.

(V, \oplus, \odot) heißt dann K -Vektorraum (VR über K), falls gilt:

a) (V, \oplus) kommutative Gruppe

b) $\forall v, w \in V \forall \alpha, \beta \in R:$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad (\alpha + \beta) \odot V = (\alpha \odot V) + (\beta \odot V) \\ \quad \alpha \odot (V \oplus W) = (\alpha \odot V) \oplus (\alpha \odot W) \\ 2) \quad (\alpha \cdot \beta) \odot V = (\beta \odot V) \odot \alpha \\ 3) \quad 1 \odot V = V \text{ (Unitäres Gesetz)} \end{array} \right\} \text{Distributivgesetze}$$

Elemente von V heißen „Vektoren“, Elemente von K „Skalare“.

Notation: 0 für neutrale Elemente in (V, \oplus) , $+$ statt \oplus ; Keine Unterscheidung von \cdot und \odot .

1.9 Definition/Bemerkung

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und M Menge.

Ein n -Tupel in M ist eine Abbildung aus der Menge $1, 2, 3, \dots, n \rightarrow M$.

Schreibweise oft (x_1, \dots, x_n) statt $x: \{1, \dots, n\} \rightarrow M$.

$n=2$: „Paar“,

$n=3$: „Tripel“,

$n=4$: „Quadrupel“.

$M^n :=$ Menge der n -Tupel in M ,

$$M^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in M, i = 1, 2, \dots, n\}$$

b) Sei $(K, +, \cdot)$ Körper. Dann ist K^n mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n, (y_1, y_2, \dots, y_n) \in K^n, \lambda \in K,$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Ein K -Vektorraum.

c) Wichtige Beispiele: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

1.10 Definition: Untergruppen, -räume, Normalteiler

- a) Sei (G, \cdot) Gruppe. Eine nichtleere Teilmenge $U \subset G$ heißt Untergruppe falls $\forall a, b \in U : a \cdot b^{-1} \in U$
- b) Sei V ein Vektorraum über dem Körper K . Eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ heißt Unter(-vektor-)raum von V falls:
- 1) $\forall u, v \in U : u + v \in U$
 - 2) $\forall \lambda \in K \forall u \in U : \lambda u \in U$
- c) Eine Untergruppe $U \subset G$ heißt Normalteiler von G (auch normal in G), falls $\forall g \in G \forall u \in U : g \cdot u \cdot g^{-1} \in U$

1.11 Bemerkung

- a) Falls $U \subset G$ Untergruppe, so ist für $a, b \in U$ auch $a + b \in U$ und U ist mit der eingeschriebenen Verknüpfung $\cdot \Big|_{U \times U} : U \times U \rightarrow U$ auch Gruppe
- b) Falls $U \subset V$ Unterraum ist, so ist $\left(U, + \Big|_{U \times U} : U \times U \rightarrow U; \cdot \Big|_{K \times U} : K \times U \rightarrow U \right)$ auch Vektorraum.

Beweis:

- b) trivial
- a) Für $A \in U$ ist $a \cdot a^{-1} \in U$, also $e \in U$ (e ist neutr. Element). Somit zu $b \in U$ auch $e \cdot b^{-1} = b^{-1} \in U$. Also U Untergruppe.

Bemerkung:

Falls $U \subset G$ Normalteiler, so kann man

- 1) für $a \in G$ die „Nebenklasse von a “ durch $\bar{a} := a \cdot U := \{a \cdot u | u \in U\}$ definieren.
- 2) Auf diesen Nebenklassen eine Verknüpfung $\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}$ definiert.

Beim Beweis der Wohldefiniertheit (d.h. der Unabhängigkeit von $\overline{a \cdot b}$ von dem Repräsentanten $a = \bar{a}$, $b = \bar{b}$) gilt die Normalteilereigenschaft. Die Menge der Nebenklassen wird dann mit „ x “ zu einer Gruppe;

Bei G/U , Quotienten-/Faktorgruppe (G modulo U). Falls $\#G < \infty$, so ist $\#G/U = \frac{\#G}{\#U}$

1.12 Definition: affiner Unterraum

Sei V K -Vraum. $A \subset V$ heißt affiner Unterraum, falls es einen Unterraum $U \subset V$ und ein $x_0 \in V$ gibt, sodass

$$A = x_0 + U = \{y \in V | \exists u \in U : y = x_0 + u\} = \{x_0 + u | u \in U\}.$$

(Im Allgemeinen ist so ein A kein Unterraum, nur falls $x_0 \in U$!)

1.13 Beispiel

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n\}$ ist \mathbb{R} -Vraum z.B. in der Ebene \mathbb{R}^2 .

Geraden durch 0 haben die Form $g_x = \{\lambda \cdot x | \lambda \in \mathbb{R}\}$ (Unterräume).

Affine Unterräume: Geraden, die typischerweise 0 nicht enthalten.

2 Homomorphismen, lineare Abbildungen

2.1 Definition

a) Seien (G, \circ) und (H, \cdot) Gruppen.

Eine Abbildung $\varphi : G \rightarrow H$ heißt Gruppenhomomorphismus, falls

$$\forall a, b \in G : \varphi(a \circ b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

b) Seien V, W Vektorräume über dem selben Körper K .

Eine Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ heißt Vektorraumhomomorphismus (oder K -linear) falls gilt:

$$1) \quad \forall u, v \in V : \underbrace{\varphi(u+v)}_{inV} = \underbrace{\varphi(u) + \varphi(v)}_{inW}$$

$$2) \quad \forall \lambda \in K \quad \forall u \in V : \underbrace{\varphi(\lambda \cdot u)}_{inK \times V \rightarrow V} = \underbrace{\lambda \cdot \varphi(u)}_{inK \times W \rightarrow W}$$

c) Ähnlich: Ring- und Körperhomomorphismus, wobei zusätzlich $\varphi(1) = 1$ gefordert wird

2.2 Definition

Sei $\varphi : V \rightarrow W$ Homomorphismus (Gruppen-, Vektorraum-, etc.)

| | | | |
|-----------------|----------------|-------|------------------------------|
| φ heißt | Monomorphismus | falls | φ injektiv |
| " | Epimorphismus | falls | φ surjektiv |
| " | Isomorphismus | falls | φ bijektiv |
| " | Eudomorphismus | falls | $V=W$ |
| " | Automorphismus | falls | $V=W$ und φ bijektiv |

2.3 Definition

Seien U, V, W K -Vektorräume und $\varphi : U \rightarrow V$ sowie $\psi : W \rightarrow W$ beide K -linear. Dann auch $\psi \circ \varphi : U \rightarrow W$ (Entsprechend für alle Gruppenhomomorphismen etc.)

Beweis:

$$\begin{aligned} & \text{(leicht), z.B. } (\psi \circ \varphi)(x + y) = \psi(\varphi(x + y)) = \psi(\varphi(x) + \varphi(y)) \\ & = \psi(\varphi(x)) + \psi(\varphi(y)) = (\psi \circ \varphi)(x) + (\psi \circ \varphi)(y) \end{aligned}$$

2.4 Definition/Bemerkung

Sei $\varphi : V \rightarrow W$ Homomorphismus (Vr.- oder Gruppen-) dann gilt:

a) $\text{Bild}(\varphi) := \{y \in W \mid \exists x \in V : \varphi(x) = y\}$ ist Unterraum von W (-gruppe).

b) $\text{Ker}(\varphi) := \{x \in V \mid \varphi(x) = 0\}$ ist Unterraum von V (in „Gruppenfall“: Normalteiler von V)

2.5 bemerkung

Sei $\varphi : V \rightarrow W$ Vektorraumhomomorphismus. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi \text{ injektiv} & \Leftrightarrow_1 \forall x \in V : [\varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0] \quad * \\ & \Leftrightarrow_2 \text{Ker}(\varphi) = \{0\} \end{aligned}$$

Beweis:

„ \Rightarrow_1 “ Sei φ injektiv. Sei $x \in V$, $\varphi(x) = 0$. Z.z. $x = 0$. Es ist $\varphi(0) = 0$ (stets für lineare Abbildungen). Da φ injektiv ist $x = 0$.

„ \Leftarrow_1 “ Seien $x, y \in V$, $\varphi(x) = \varphi(y)$. Z.z. $x = y$. $0 = \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y)$, also $x - y = 0$, $x = y$

„ \Rightarrow_2 “ Falls * gilt, so $\text{Ker}(\varphi) \subset \{0\}$, „ \supset “ klar, da $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$

„ \Leftarrow_2 “ Sei $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Sei $x \in V$, $\varphi(x) = 0$, dann $x \in \text{Ker}(\varphi)$, also $x = 0$

2.6 Bezeichnung

Für K-Vräume V, W sei

$$\text{Hom}_K(V, W) := \{\varphi : V \rightarrow W \mid \varphi \text{ ist K-linear}\}$$

$$\text{End}_K V := \{\varphi : V \rightarrow V \mid \varphi \text{ ist K-linear}\}$$

3 Lineare Unabhängigkeit, Basen, Dimensionen

Sei stets K Körper, V ein K-Vraum.

Für eine Indexmenge I ist eine Familie $(W_i)_{i \in I}$ von Vektoren aus V ist eine Abbildung von $I \rightarrow V$

$$i \rightarrow v_i$$

3.1 Definition

Sei $(V_i)_{i \in I}$ Familie von Vektoren in V. Dann heißt

$$\text{span}[(V_i)_{i \in I}] := \{w \in V \mid \exists k \in \mathbb{N}, \lambda_1 \cdot \lambda_k \in K, i_1, \dots, i_k \in I \text{ mit } w = \lambda_1 \cdot v_{i_1} + \dots + \lambda_k \cdot v_{i_k}\}$$

Linearkombination von Vektoren aus der Form $(V_i)_{i \in I}$ der von $(V_i)_{i \in I}$ erzeugte Unterraum von V.

3.2 Definition

a) $(V_i)_{i \in I}$ heißt Erzeugendensystem von V, falls $\text{span}[(V_i)_{i \in I}] = V$.

b) $(V_i)_{i \in I}$ heißt linear unabhängig, falls gilt:

Falls $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$, $i_1, \dots, i_k \in I$ und $\lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_k v_{i_k} = 0$, so gilt $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, sonst linear abhängig.

c) $(V_i)_{i \in I}$ heißt Base von V, falls $(V_i)_{i \in I}$ linear unabhängig und Erzeugendensystem von V

3.3 Bemerkung

Falls $(V_i)_{i \in I}$ und $(W_j)_{j \in J}$ Familien in V und $v_{i_1} \neq v_{i_2}$

falls $i_1, i_2 \in I$, $i_1 \neq i_2$ und $\{v_i \mid i \in I\} \subset \{w_j \mid j \in J\}$.

Dann:

i) $(W_j)_{j \in J}$ linear unabhängig $\Rightarrow (V_i)_{i \in I}$ l.u.

ii) $(V_i)_{i \in I}$ Erzeugendensystem von V $\Rightarrow (W_j)_{j \in J}$ Erzeugendensystem

3.4 Satz

Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien (v_1, \dots, v_k) und $(W_j)_{j \in J}$ zwei Basen von V . Damit ist $\#J = k$. Die Länge einer Basis von V ist also, falls V endliche Basis hat, eindeutig bestimmt. Diese Zahl heißt Dimension von V über K .

In Zeichen: $\dim_K V$.

Bemerkung:

Häufig auch Angabe von Basen/Erzeugendensystemen etc. als Menge, z.B. „ $\{v_1, v_2, v_3\}$ Basis von \mathbb{R}^3 “ (Gemeint: Die Familie, wo jedes Element der Menge genau einmal vorkommt).

3.5 Hilfssatz

Sei K Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in K$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n + 1$.

Damit hat das homogene lineare Gleichungssystem

$$(S_n) \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n+1} \cdot x_{n+1} = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n+1} \cdot x_{n+1} = 0 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn+1} \cdot x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

von n Gleichungen für $n+1$ Variablen x_1, \dots, x_{n+1} eine nichttriviale nicht alle $x_i=0$

Lösung $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in K^{n+1}$

3.6 Lemma

Sei V ein K -Vraum, $n \in \mathbb{N}$ mit (v_1, \dots, v_n) Erz.sys. von V sowie (w_1, \dots, w_m) linear unabhängige Familie. Dann $m \leq n$.

Beweis:

Annahme: $m > n$. Dann $m - n > 0$ und auch (w_1, \dots, w_m) l.u. Für $j=1, \dots, n+1$ ex. $a_{ij} \in K$, $i = 1, \dots, n$ mit $w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot v_i$, da (v_1, \dots, v_n) Erz.sys.

Nach Hilfssatz ex. x_1, \dots, x_{n+1} nicht alle 0, so dass $\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \cdot x_j = 0$, $i = 1, \dots, n$.

$$\text{Es folgt } \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \cdot w_j = \sum_{j=1}^{n+1} x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot v_i \right) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \cdot x_j \right)}_0 v_i = 0$$

Widerspruch zu (w_1, \dots, w_{n+1}) l.u. Folgt: $m \leq n$

Beweis von Satz 3.4:

Sei (v_1, \dots, v_n) Basis von V , $(W_j)_{j \in J}$ ebenfalls für jede Teilmenge $\{j_1, \dots, j_m\} \subset J$ gilt: w_{j_1}, \dots, w_{j_m} ist l.u., da $(W_j)_{j \in J}$ l.u.

Nach 3.6 $m \leq n$ folgt: J endlich, $\#J \leq n$. Sei $m := \#J$ ($m \leq n$), ohne Einschränkung sei $i = \{1, \dots, m\}$. (w_1, \dots, w_m) ist Basis von V , insbes. Erz.sys. (v_1, \dots, v_n) ist Basis von V , insbes. l.u.

$\Rightarrow n \leq m$. Zusammen: $m = n$

3.7 Austauschlemma

Sei (v_1, \dots, v_n) eine Basis des K -Vraumes V und sei $w \in V$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Genau dann ist $(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)$ wieder Basis von V , wenn gilt:

In der eindeutigen Basisdarstellung $w = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_i \cdot v_i + \dots + \lambda_n v_n$ ist $\lambda_i \neq 0$.

3.8 Satz

Sei $\{0\} \neq U$, $U \subset V$ Unterraum, $k \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_k \in U$. Äquivalent sind:

- i) (v_1, \dots, v_k) ist Basis von U .
- ii) (v_1, \dots, v_k) ist maximal l.u. in U d.h. (v_1, \dots, v_k) ist l.u. und für $w \in U$ ist (v_1, \dots, v_k, w) nicht l.u.
- iii) (v_1, \dots, v_k) ist minimales Erz.sys. von U , d.h. (v_1, \dots, v_k) ist Erz.sys. und für $j \in \{1, \dots, k\}$ ist $(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k)$ kein Erz.sys. von U .
- iv) Jeder Vektor $w \in U$ lässt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination der v_j darstellen, $w = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j$

Beweis (Ringschluss):

- (i) \Rightarrow (ii): Sei (v_1, \dots, v_k) Basis von U . Dann ist (v_1, \dots, v_n) l.u. Sei $w \in U$. Da (v_1, \dots, v_k) auch Erz.sys. von U ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ mit $w = \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j$.

$$\text{Also } 0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k - w$$

- (ii) \Rightarrow (iii): Sei (v_1, \dots, v_n) max. l.u. (v_1, \dots, v_k) ist Erz.sys. Sei $w \in U$. Dann (v_1, \dots, v_k, w) nicht l.u., also ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ mit $0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1}$ nicht alle $\lambda_i = 0$.

Wäre $\lambda_{k+1} = 0$, so wegen v_1, \dots, v_k l.u. auch $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

Widerspruch, also $\lambda_{k+1} \neq 0$. Folgt: $w = \sum_{j=1}^k (-\lambda_{k+1}^{-1} \cdot \lambda_j) \cdot v_j$, also $w \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$.

(v_1, \dots, v_k) ist minimales Erz.sys. Für $i \in \{1, \dots, k\}$ ist $(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k)$ kein Erz.sys, sonst würden $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_k$ ex. mit $v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + v_{i+1} \lambda_{i+1} + \dots + \lambda_k v_k$.

$$\text{Dann } 0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \underbrace{-1}_{\neq 0} v_i + \dots + \lambda_k v_k.$$

Widerspruch zu (v_1, \dots, v_k) l.u.

- (iii) \Rightarrow (iv): Jeder Vektor $w \in U$ hat Darstellung $w = \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j$, da (v_1, \dots, v_k) Erz.sys.

Eindeutigkeit: Sei $w \in U$, $w = \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j$. Z.z. $\lambda_j = \mu_j$ für $j = 1, \dots, k$. Es

ist $0 = \sum_{j=1}^k (\lambda_j - \mu_j) v_j$. Falls $j_0 \in \{1, \dots, k\}$ ex. mit $\lambda_{j_0} - \mu_{j_0} \neq 0$, so folgt:

$$v_{j_0} = -(\lambda_{j_0} - \mu_{j_0})^{-1} \sum_{j=1}^k (\lambda_j - \mu_j) v_j, \text{ also } v_{j_0} \in \text{span}(v_1, \dots, \cancel{v_{j_0}}, \dots, v_k).$$

Dann $(v_1, \dots, \cancel{v_{j_0}}, \dots, v_k) = \text{span}((v_1, \dots, v_k))$ Widerspruch zu (v_1, \dots, v_k) min. Erz.sys.

Also: $\lambda_j = \mu_j$ für $j = 1, \dots, k$.

(iv) \Rightarrow (i): Erz.sys. klar. l.u.: Sei $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$. Auch $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_k = 0$. Mit Eindeutigkeit der Darstellung $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, also (v_1, \dots, v_k) l.u.

Zusammen: (v_1, \dots, v_k) basis.

3.9 Folgerung

Sei V ein K -Vraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$.

- n l.u. Vektoren v_1, \dots, v_m sind stets Basis von V
- n Vektoren v_1, \dots, v_n die Erz.sys. von V bilden, sind Basis von V
- Falls (v_1, \dots, v_n) l.u. und $1 \leq k < n$, so ex. Basis $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ von V

Beweis:

a) Seien v_1, \dots, v_n l.u. Falls $w \in V$, $w \notin \text{span}(v_1, \dots, v_k)$, so auch (v_1, \dots, v_n, v_w) l.u. und w hat Erz.sys. Widerspruch zu Lemma 3.6.

Also (v_1, \dots, v_n) auch Erz.sys. von V , sonst Basis.

b) Falls (v_1, \dots, v_n) linear abhängig, so ex. $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ mit $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{span}(v_1, \dots, \cancel{v_{j_0}}, \dots, v_n)$, also $(v_1, \dots, \cancel{v_{j_0}}, \dots, v_n)$ Erz.sys. Nach Lemma 3.6, da (b_1, \dots, b_n) (Basis) l.u.: $n \leq n-1$. Widerspruch!

Also (v_1, \dots, v_n) l.u. also Basis.

c) (v_1, \dots, v_k) ist keine basis, da $k < n = \dim_K V$, also (v_1, \dots, v_k) kein Erz.sys. Also $v_{k+1} \in V_j$, $v_{k+1} \notin \text{span}(v_1, \dots, v_k)$. Dann $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$ l.u. (Beweis leicht).

Falls $k+1 = n$, so fertig (dann nach a) (v_1, \dots, v_{k+1}) Basis.

Sonst: Diesen Schritt wiederholen, liefert $v_{k+2}, v_{k+3}, \dots, v_n$

3.10 Satz

Seien V, W k -Vräume, beide mit Dimension $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \text{Hom}_K(v_j w)$ (d.h. $f: V \rightarrow W$ ist K -linear). Dann sind äquivalent:

- f ist Isomorph (d.h. bijektiv)
- f ist surjektiv
- f ist injektiv
- Für jede Basis (v_1, \dots, v_n) von V ist $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ Basis von W .

Beweis:

(i) \Rightarrow (ii): trivial

(ii) \Rightarrow (iv): Sei (v_1, \dots, v_n) Basis von V . Dann $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ Erz.sys von $\text{Bild}(f)$, denn falls $w = f(v) \in \text{Bild}(f)$ (mit einem $v \in V$), so hat V Darstellung $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ und somit $w = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$. Da f surjektiv ist $\text{Bild } f: W$. Also $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ Erz.sys. von W . Nach 3.9: auch Basis von W .

(iv) \Rightarrow (iii): Annahme: $\exists v \neq 0$, $f(v) = 0$. Nach 3.9c) ex. Basis (v_1, \dots, v_n) von V . Dann auch $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ Basis von W . Insbesondere $f(v) \neq 0$. Widerspruch.

Also: $\text{Ker}(f) = \{0\}$, für injektiv (vgl. 2.5)

(iii)⇒(i) Sei (v_1, \dots, v_n) Basis von V . Behauptung: $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ l.u. (in W).

Beweis: Falls $\lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0$, so $0 = f(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i)$ (f linear),

also, da f injektiv, $0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, also $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ f linear, da (v_1, \dots, v_n) l.u.

Mit 3.9b) folgt: $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ Basis von W , insbes. Erz.sys. zu $w \in W$ ex. also $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit $w = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = f(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) \in \text{Bild}(f)$, also f surjektiv, insgesamt bijektiv.

4 Lineare Abbildungen und Matrizen

Sei K Körper. Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei $K^{m \times n} : \{(a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \mid a_{ij} \in K, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n\}$
Familie

Abb. $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow K$
 $(i, j) \mapsto a_{ij}$

Schreibweise: $A = (a_{ij}) = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = m \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right) \rightarrow n$

4.1 Bemerkung/Definition

Seien V, W K -Vräume und $n = \dim_K V$, $m = \dim_K W$ und $f \in \text{Hom}_K(V, W)$.

Seien $\mathcal{A} := (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V . $\mathcal{B} := (w_1, \dots, w_m)$ Basis von W .

a) Dann ex. eindeutige Zahlen $a_{ij}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$, so dass gilt: $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$ ($j=1, \dots, n$) (Beweis klar)

b) Die Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ heißt darstellende Matrix von f bzgl. der Basen \mathcal{A} und \mathcal{B} ,
 in Zeichen $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Merkregel: Die i -te Spalte enthält die Koeffizienten von $f(v_j)$ bzgl. der basis w_1, \dots, w_m .

Kurz: Die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren.

4.2 Definition: Matrixmultiplikation

Für $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und $B = (b_{ij}) \in K^{l \times m}$ sei $C := (c_{ij}) \in K^{l \times n} = B \cdot A$.

$c_{ij} = \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj}$ (c_{ij} = i te Zeile von B und j te Spalte von A)

(Spaltenzahl von B muss Zeilenzahl von A sein, damit $B \cdot A$ definiert ist.)

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ -4 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4.3 Satz: Kompositionen linearer Abbildungen und Matrixmultiplikationen

Seien U, V, W K -Vräume mit Dimensionen n, m, l und Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. Sei $f \in \text{Hom}_K(U, V)$ und $g \in \text{Hom}_K(V, W)$ und $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$, $B := M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(g)$.

Dann ist $B \cdot A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(g \circ f)$, also $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(g) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$.

Beweis:

Sei $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$, $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_l)$.

$$\begin{aligned} \text{Für } i \in \{1, \dots, m\} \text{ ist } g(v_i) &= \sum_{k=1}^l b_{ki} \cdot w_k \text{ und für } j = 1, \dots, n \text{ ist } f(u_j) = \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ij} v_i. \text{ Somit für } j = 1, \dots, n \text{ (} g \circ f \text{)}(u_j) = g \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} v_i \right) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot g(v_i) = \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^l b_{ki} w_k \right) = \sum_{k=1}^l \underbrace{\left(\sum_{i=1}^m b_{ki} \cdot a_{ij} \right)}_{=(B \cdot A)_{kj}} w_k \end{aligned}$$

Also $[M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(g \circ f)]_{kj} = (B \cdot A)_{kj}$, $k = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, n$.

4.4 Bemerkung

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $K^{n \times n}$ (mit komponentenweiser Addition und Matrixmultiplikation

als Verknüpfungen) ein Ring mit Eins (Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

Im Allgemeinen nicht kommutativ.

Allgemeiner Fall: Vektoren werden durch Elemente von K^n beschrieben bzgl. einer Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ des Vraumes V , also $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.

$(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ heißt „Koordinatenvektor“ von x bzgl. der basis B .

4.5 Bemerkung

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \in K^{m \times n}$ induziert eine lineare Abbildung.

$$\hat{A}: K^n \rightarrow K^m, \text{ (d.h.: } (A \cdot x)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \text{ } i = 1, \dots, m \text{)}$$

bzgl. der Einheitsbasen $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{E}_m = (\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m)$ von K^n über K^m gilt:

$$M_{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{E}_n}(\hat{A}) = A.$$

Beweis:

$$\text{Z.z. } \hat{A}(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \hat{e}_i$$

$$\hat{A}(e_j) = A e_j, (A e_j)_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot \underbrace{(e_j)_k}_{\delta_{jk}} = a_{ij}$$

$$\text{Also } A \cdot e_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot \hat{e}_i$$

$$\text{z.B. } 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

4.6 Satz: Invertierbare Matrizen, Basisvektoren

$$\text{a) } A \in K^{n \times n} \text{ heißt invertierbar } \Leftrightarrow \exists B \in K^{n \times n} : B \cdot A = I_n, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

($n \times n$ Einheitsmatrix)

In diesem Fall ist B eindeutig bestimmt und es gilt auch $A \cdot B = I_n$. Schreibweise: $B = A^{-1}$ (inverse Matrix)

Die Gruppe (!) der invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Elementen aus K wird mit $GL(n, K)$ bezeichnet. Für $A, B \in GL(n, K)$ ist $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

b) Sei V K -Vraum, $\dim V = n$ und $f \in \text{End}_K V$ und seien B, B' Basen von V .

Dann gilt: f ist Homomorphismus $\Leftrightarrow M_{B'}^B(f)$ invertierbar.

c) Sei $A := M_B^B(f), A' = M_{B'}^{B'}(f)$. Mit $T := M_{B'}^B(\underbrace{id_V}_{\text{ident. Abb.}}) \in K^{n \times n}$ gilt dann:

ident. Abb.

$$x \mapsto x$$

$$A = T^{-1} \cdot A' \cdot T, \text{ also } M_B^B(id_V) = (M_{B'}^{B'}(id_V)) \cdot M_{B'}^B(f) \cdot M_B^{B'}(id_V)$$

d) Zwei Matrizen $A, \tilde{a} \in K^{n \times n}$ heißen ähnlich, falls $T \in GL(n, K)$ ex. mit $A = T^{-1} \cdot \tilde{a} \cdot T$

Beweis:

zu a) Seien $\hat{A}, \hat{B} : K^n \rightarrow K^n$ die durch Multiplikation mit A bzw. B erzeugten lin. Abbildungen ($x \mapsto Ax$ bzw. $x \mapsto Bx$). Dann $(\hat{A} \circ \hat{B})(x) = B \cdot (Ax) = (B \cdot A)x = x$ also (vgl. Übg.) \hat{B} surj., \hat{A} inj. Nach 3.10: \hat{A} bij., \hat{B} bij., $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$, auch $\hat{A} \circ \hat{B} = id_{K^n}$.

$$\text{Also } \underbrace{\forall x : \hat{A}(\hat{B}(x)) = x}_{(A \cdot B)x}. \text{ Folgt: Auch } A \cdot B = I_n.$$

zu b) „ \Rightarrow “ f Isom $\Rightarrow \exists g \in \text{End}_K V, g \circ f = id_V$. Nach 4.3: $M_B^B(g \circ f) = M_B^B(g \circ f) M_B^B(id_V) = I_n = M_B^{B'}(g) \circ M_{B'}^B(f)$, also $M_{B'}^B(f)$ invertierbar.

„ \Leftarrow “ Sei $M_{B'}^B(g \circ f)$ invertierbar mit inv. Matrix $M = (m_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$.

Def. $g : V \rightarrow V$ auch $g(b'_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} b_i$ (dabei $B' = (b'_1, \dots, b'_n), B = (b_1, \dots, b_n)$). Dann $M_B^{B'}(g) = (m_{ij}) = M$. Dann $M_B^B(g \circ f) = I_n = M_B^{B'}(g) \cdot M_{B'}^B(f)$, also: $(g \circ f)(b_j) = b_j$ für $j = 1, \dots, n$ also $g \circ f = id_V$. Folgt: f inj., g surj. Mit 3.10 f bij. also Isomorphismus.

zu c) $f = id_V \circ f \circ id_V$, also nach 4.3: $A = M_B^B(f) = \underbrace{M_B^{B'}(id_V)}_{T^{-1}} \cdot \underbrace{M_{B'}^{B'}(f)}_{A'} \cdot \underbrace{M_{B'}^B(id_V)}_T$,

$$\text{also } A = T^{-1} \cdot A' \cdot T. \text{ (Nach 4.3: } M_B^{B'}(id_V) = M_B^B(id_V) = I_n)$$

4.7 Rang und Transposition

- a) Seien V, W K -Vräume, $\dim_K V = n \in \mathbb{N}$, $f \in \text{Hom}_K(V, W)$.
Dann definiert man $\text{rang } f := \dim \text{Bild}(f)$ (Bem: Autom. $\text{rang}(f) \leq \dim_K V = n$)
- b) Für $A \in K^{m \times n}$ sei $\text{rang}(A) := \text{rang}(\hat{A})$ ($\hat{A}: K^n \rightarrow K^m, x \mapsto Ax$)
 $\text{rang}(A)$ ist die max. Anzahl linear unabh. Spalten von A („Spaltenrang v. A “).
- c) Für $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m} \in K^{m \times n}$ definiert man $A^T := (a_{ij}^{\sim})_{i=1, \dots, m} \in K^{n \times m}$, $a_{ij}^{\sim} = a_{ji}$ (Transponierte von A)
- d) Für $A \in K^{m \times n}$, $B^{n \times l}$ ist $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ und falls $A \in \text{Gl}(n, K)$, so auch A^T , und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- e) Es gilt: $\text{rang } A = \text{rang } A^T$
- f) Für den Zeilenrang von A (max. Anzahl l.u. Zeilen von A) gilt: $\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A)$

Beweis:

b) Sei $A = (\vec{a}_1^{\uparrow}, \dots, \vec{a}_n^{\uparrow})$.

Dann ist für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ $\hat{A}(x) = A \cdot x = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n$.

Also $\text{Bild}(\hat{A}) = \text{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$. Somit $\text{rang}(A) = \text{rang}(\hat{A}) = \dim \text{Bild}(\hat{A}) = \dim \text{span}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \text{max. Anzahl l.u. Spalten innerhalb von } \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

d) Übung ($A \cdot B$ und A^T und B^T (Produktmatrix transponieren und vertauschen!))

e) Beweisskizze: Klar, falls $A=0$. Somit $r := \text{rang } A \geq 1$

Es ex. Basen \mathcal{A} von K^n , \mathcal{B} von K^m , so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\hat{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in$

$K^{m \times n}$ ($r = \text{Anzahl der Spalten/Zeilen, die eine 1 enthalten}$).

Es ex. somit inv.bare Matrizen $S \in \text{Gl}(m, K)$, $T \in \text{Gl}(n, K)$ mit $T \cdot A \cdot$

$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$.

Dann $(TAS)^T = S^T \cdot A^T \cdot T^T$. Aus Invertierbarkeit von S^T , T^T folgt $\text{rang}(A^T) = r$. Somit $\text{rang}(A^T) = \text{Spaltenrang } A^T = \text{Zeilenrang } A^T = r = \text{Spaltenrang } A$

5 lineare Gleichungssysteme, Matrizenumformung

5.1 Dimensionsformel

Seien V, W K -Vräume, $f: V \rightarrow W$ linear. Sei $V = n \in \mathbb{N}$. Dann $\dim V = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Bild}(f)$ (Dabei $\dim\{0\} = 0$)

Beweis:

- 1) Falls $\text{Ker}(f) = \{0\}$, so ist $\tilde{f} : V \rightarrow \text{Bild}(f)$ bijektiv, also Isomorphismus, also $\dim V = \dim \text{Bild}(f)$

$$x \mapsto f(x)$$
- 2) Falls $\text{Ker}(f) = V$, so $\dim V = \dim \text{Ker}(f)$, $\text{Bild}(f) = 0$
- 3) Sonst: Wähle Basis v_1, \dots, v_k von $\text{Ker}(f)$ ($k \in \{1, \dots, n-1\}$), ergänze zur Basis $(v_1, \dots, v_w, v_{w+1}, \dots, v_n)$ von V (vgl. 3.9). Sei $u := \text{span}(v_{k+1}, \dots, v_n)$. Dann $\tilde{f} : U \rightarrow \text{Bild}(f)$ Isomorphismus (!), somit, da v_{k+1}, \dots, v_n Basis

$$x \mapsto f(x)$$
von U : $\dim \text{Bild}(f) = \dim U = n - k$. Somit $n = k + (n - k) \Leftrightarrow \dim V = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Bild}(f)$

Beispiel zur Transposition:

$$A : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2} \quad \text{rang}(A)=2$$

$$\tilde{A} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(\tilde{A})=1 \quad \text{Bild}(\tilde{A}) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim \text{Bild}(\tilde{A}) + \dim \text{Ker}(\tilde{A}) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$$\text{z.B. } \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(\tilde{A}) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{A} \cdot x = 0\} = \text{span}((-2, 1, 0), (0, 3, -2)) = \mathbb{R} \cdot (-2, 1, 0) + \mathbb{R} \cdot (0, 3, -2)$$

Ein lineare Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\vdots \quad + \dots + \vdots = \quad \vdots \quad (\text{m Gleichungen für n Variablen } x_1, \dots, x_n)$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $b_i \in K$, $i = 1, \dots, m$) lässt sich mit $A =$

$$(a_{ij}) \in K^{m \times n}, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m \text{ als } A \cdot x = b \text{ schreiben. } (x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) \in K^n \text{ gesuchter}$$

Vektor). Offenbar lösbar $\Leftrightarrow b \in \text{Bild}(\hat{A})$

5.2 Bemerkung

Falls $A \cdot x = b$ lösbar und $p \in \mathbb{R}^n$ eine spezielle Lösung, so ist Lösungsmenge gleich $p + \text{Ker}(\hat{A})$ (affiner Unterraum K^n)

„Allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems = spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems + allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems.“

Beweis:

Sei p spezielle Lösung von $A \cdot x = b$, also $Ap = b$.

Falls $v \in \text{Ker}(\hat{A})$, also $Av = 0$, so $A(p + v) = \underbrace{Ap}_b + \underbrace{Av}_0 = b$.

Falls \tilde{p} weitere Klsung von $Ax = b$, so $A(p - \tilde{p}) = Ap - A\tilde{p} = b - b = 0$, also $v := p - \tilde{p} \in \text{Ker}(\hat{A})$ und $\tilde{p} = p - v = p + (\underbrace{-v}_{\in \text{Ker}(\hat{A})}) \in p + \text{Ker}(\hat{A})$

5.3 Zeilenumformungen und Elementarmatrizen

Zeilenumformungen sind:

- ⊙ Vertauschungen von zwei Zeilen
- ⊙ Addition des λ -fachen einer Zeile zu einer anderen
- ⊙ Multiplikation einer Zeile und $\lambda \in K/\{0\}$

Zeilenumformungen einer Matrix A sind beschreibbar als Multiplikationen von links mit so genannten Elementarmatrizen aus $K^{m \times m}$

z.B. Addition des λ -fachen der j -ten Zeile zur i -ten Zeile mit $j \neq i$ ($A \in K^{3 \times 3}$, $i = 1, j = 2$):

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \leftarrow z_1 \rightarrow \\ \leftarrow z_2 \rightarrow \\ \leftarrow z_3 \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow \lambda \cdot z_2 + z_1 \rightarrow \\ \leftarrow z_2 \rightarrow \\ \leftarrow z_3 \rightarrow \end{pmatrix}$$

Analog: Spaltenumformungen sind Multiplikationen von rechts mit Elementen aus $K^{n \times n}$.

Elementarmatrizen sind invertierbar.

Zeilen und Spaltenumformungen ändern nicht den Rang von A . Dimension von Zeilenraum/Spaltenraum bleibt gleich.

$\det(a)$ wird durch Vorfaktor verändert. Wenn $\det(A) = 0$, ist $\det(A) = \det(E \cdot A) = \det(A \cdot E) = 0$

5.4 Satz

Die Elementarmatrizen erzeugen $GL(n, K)$, d.h. jede Matrix $A \in GL(n, K)$ lässt sich als Produkt von Elementarmatrizen $A = E_1 \cdots E_k$ schreiben. (nicht eindeutig!)

Beweisskizze:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Durch Zeilenvertauschung $a_{11} \neq 0$. Durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten Zeile zu den anderen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{pmatrix}$$

Wiederholung dieses Verfahrens mit Untermatrix bis obere Dreiecksmatrix

erreicht ist, also: $E_k \cdots E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \hat{a}_{nn} \end{pmatrix}$, $\hat{a}_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ (da A

invertierbar.)

Durch weitere Zeilenumformungen: Diagonalgestalt: $E_l \cdots E_k \cdots E_1 \cdot A =$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \hat{a}_{nn} \end{pmatrix},$$

schließlich Multiplikation der i -ten Zeile mit $(\hat{a}_{ii})^{-1}$: $E_m \cdots E_l \cdots E_k \cdots E_1 \cdots A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} \cdots E_l^{-1} \cdots E_m^{-1}$ (Produkte von Elementarmatrizen).

Folgerung:

Praktisches Verfahren zur Matrixinversion ($A \in K^{n \times n}$ gegeben):

- * Schreibe A auf, daneben Einheitsmatrix I_n : $A|I_n$
- * Wende Zeilenumformungen auf A an, bis aus A Einheitsmatrix entstanden ist. Diese aber auch gleichzeitig auf die rechts daneben stehende Einheitsmatrix anwenden!
- * Am Ende: rechts A^{-1} : $I_n|A^{-1}$

Begründung: $E_l \cdots E_k \cdots E_1 \cdots I_n = A^{-1}$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}:$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Für allgemeine Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme, Beschränkung auf Fall $Ax = b$ mit $A \in K^{n \times n}$, $b \in K^n$, A invertierbar

5.5 Gaußsches Eliminationsverfahren

- Bilde geränderte Koeffizientenmatrix $(A, b) \in K^{n \times (n+1)}$
- Führe wie in 5.4 Zeilenumformungen durch bis aus A die Einheitsmatrix geworden ist (auch auf b anwenden!)

$$\text{- Ergebnis: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & \hat{b}_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \hat{b}_n \end{array} \right), \text{ eindeutige Lösung ist } x_1 = \hat{b}_1, x_2 = \hat{b}_2, \dots$$

Begründung:

$$Ax = b \Leftrightarrow E_1 \cdot Ax = E_1 \cdot b$$

$$\vdots \Leftrightarrow \vdots$$

$$\Leftrightarrow E_l \cdots E_1 \cdot Ax = \underbrace{E_l \cdots E_1 \cdot b}_{\hat{b}} \Leftrightarrow x = \hat{b}$$

5.6 Bemerkung: Variante

Nach Erreichen oberer Dreiecksgestalt:
$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \hat{a}_{nn} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_n \end{pmatrix} \Rightarrow x_n =$$

$$\frac{\hat{b}_n}{\hat{a}_{nn}} \Rightarrow x_{n-1} = \frac{(\hat{b}_{n-1} - \hat{a}_{n-1,n} x_n)}{\hat{a}_{n-1,n-1}} \Rightarrow x_i = \frac{\hat{b}_i - \sum_{j=i+1}^n \hat{a}_{ij} x_j}{\hat{a}_{ii}}$$

... Rückwärtseinsetzen (Mehr in num. Mathematik)

Beispiel:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} x_1 & -2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + x_2 & -x_3 & = & 0 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 & = & -1 \end{array} \right| \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{44}{7} & \frac{9}{7} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$x_3 = \frac{9}{44}$$

$$7x_2 = -3 + \frac{90}{44} \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{22}$$

$$x_1 - 2 \cdot -\frac{3}{22} + 3 \cdot \frac{9}{44} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{44}$$

6 Determinanten

Sei K Körper, Permutationsgruppe $\sum_n := \{\varphi : \{1, \dots, n\} \leftrightarrow, \varphi \text{ bijektiv}\}$

Bemerkung: Jedes $\sum_n \ni \sigma$ lässt sich schreiben als $\sigma = \tau_K \circ \dots \circ \tau_1$ mit Transpositionen τ_i (Bewegungsübergänge)

6.1 Definition/Bemerkung

Für $\sigma \in \sum_n$ sei $sign(\sigma) := \prod_{\substack{a < j \\ i, j \in \{1, \dots, n\}}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

$sign \sum_n \rightarrow \{-1, 1\}$ Gruppenhomomorphismus,

d.h. $\forall \pi, \sigma \in \sum_n : sign(\pi \circ \sigma) = sign(\pi) \circ sign(\sigma)$.

$sign(\sigma) : (-1)^{\text{Anzahl der Kreuzungen}}$

6.2 Definition/Satz: Determinante und Leibniz-Formel

a) Es existiert genau eine Abb. $det : \underbrace{K^{n \times n}}_{\text{id. mit } (K^n)^n} \rightarrow K$

mit folgenden Eigenschaften:

1) det ist linear in jeder Spalte, d.h. für $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_1, \dots, a_n, a'_i \in K^n$, $\lambda \in K$ ist $det(a_1, \dots, a_i + \lambda a'_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + \lambda det(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n)$ („multilinear“)

2) $det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$
 $\qquad \qquad \qquad i \qquad \qquad j \qquad \qquad \qquad i \qquad \qquad j$

3) $det(e_1, \dots, e_n) = 1$ (wobei e_i i -ter Einheitsvektor in K^n)

b) det ist gegeben durch $det((a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}) = \sum_{\sigma \in \sum_n} sign(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$

(Leibniz-Formel)

Veranschaulichung:

$$\begin{array}{l} a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \\ a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \\ a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \end{array}$$

Jedes σ entspricht einem Weg von links nach rechts durch die Matrix, der aus jeder Spalte und auch aus jeder Zeile genau ein Element aufsucht.

Beweis:

Sei $\det : K^{n \times n} \rightarrow K$ fu. mit 1) und 3).

1. Behauptung: Für $\sigma \in \sum_n$ ist $\det(e_\sigma(0), \dots, e_\sigma(n)) = \text{sign}(\sigma)$

Beweis:

$$\sigma = \tau_k \circ \dots \circ \tau_1 \text{ (Darstellung mit Transpositionen).}$$

$$\text{Setze } \sigma(j) := \tau_j \circ \dots \circ \tau_1, \quad j = 1, \dots, k.$$

$$\begin{aligned} \text{Dann } \det(e_\sigma(0), \dots, e_\sigma(n)) &= -\det(e_\sigma(0)(k-1), \dots, e_\sigma(n)(k-1)) \\ &= \underbrace{\dots}_{K \text{ Schritte}} = (-1)^k \underbrace{\det(e_1, \dots, e_n)}_1 = (-1)^k \underbrace{\text{sign}(\tau_k)}_{-1} \circ \dots \circ \underbrace{\text{sign}(\tau_1)}_{-1} \\ &= \text{sign}(\tau_k \circ \dots \circ \tau_1) = \text{sign}(\sigma) \end{aligned}$$

2. Behauptung:

Für $(a_{ij}) \in K^{n \times n}$ folgt

$$\begin{aligned} \det((a_{ij})) &= \det\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} e_{i_n}\right) = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \\ \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) &= 0, \text{ wenn 2 der } ij \text{ gleich sind.} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \sum_{\sigma \in \sum_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{i_{\sigma(n)}n} \frac{\det(e_1, \dots, e_n)}{\text{sign}(\sigma)}, \\ &\quad \{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\} \\ &\text{also gilt Leibniz-Formel.} \end{aligned}$$

3. Zu Zeigen: Ausdruck in a) erfüllt tatsächlich 1) - 3), Beweis nicht schwer.

6.3 Bemerkung

1) bis 3) sind vernünftige Forderungen, falls $\det(a_1, \dots, a_n)$ so etwas wie „das Volumen“ das von a_1, \dots, a_n erzeugten Parallelotops sein soll ($= \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \mid \lambda_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n\}$) (wenn $K = \mathbb{R}$)

Falls 1) und 3) gelten, dann ist 2) äquivalent mit 2') $\det(a_1, \dots, a_n) = 0 \Leftrightarrow a_1, \dots, a_n$ linear abhängig. (Beweis Übung)

6.4 Folgerung

- $\det(a_1, \dots, a_n) = 0 \Leftrightarrow a_1, \dots, a_n$ linear abhängig in K^n
- $\det(A) = \det(A^T)$, det auch in den Zeilen linear.
- Für Dreiecksmatrizen (obere/untere) mit Diagonalelementen a_{ii} , $i = 1, \dots, n$ gilt: $\det(A) = a_{11} \dots a_{nn}$

Beweis:

- Siehe 6.3

- b) $\det(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sign}(\sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma(1)^{-1}} \cdots a_{n\sigma(n)^{-1}} =$
 $\sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \det(A^T)$. Damit Zeilenlinearität klar.
- c) Nur $\sigma = id$ gibt Betrag in der Leibnizformel, nämlich $\underbrace{\text{sign}(id)}_{=1} \cdot a_{11} \cdots a_{nn}$.

6.5 Determinantenmultiplikationssatz

$$\forall A, B \in K^{n \times n} : \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Beweis:

1. Richtig für $E \cdot A$, E Elementarmatrix (Beweis: Hinschauen: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

$$\text{oder } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ Zeilenlinearität von A)}$$

2. Für $A, B \in GL(n, K)$ ex. Elementarmatrizen $E_1, \dots, E_k, F_1, \dots, F_l$ mit $A_n = E_1 \cdots E_k, B = F_1 \cdots F_l$.

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= \det(E_1 \cdots E_k \cdot F_1 \cdots F_l) = \det(E_1) \cdot \det(E_2 \cdots E_k \cdot F_1 \cdots F_l) \\ &= \dots = \det(E_1) \cdots \det(E_k) \cdot \det(F_1) \cdots \det(F_l) = \det(E_1 \cdots E_k) \cdot \det(F_1 \cdots F_l) \\ &= \det(A) \cdot \det(B) \end{aligned}$$

- 3) Falls $\det(A) = 0$ oder $\det(B) = 0$, so A nicht invertierbar oder B nicht invertierbar.

Also \hat{A} nicht injektiv oder \hat{B} nicht injektiv, also $\hat{A} \circ \hat{B}$ nicht injektiv.

($\text{DimBild}(\hat{A} \circ \hat{B}) < n$, dann $\hat{A} \circ \hat{B}$ nicht surj. auch nicht inj.).

Somit $A \cdot B$ auch nicht invertierbar: $\det(A \cdot B) = 0$.

6.6 Spezialfälle von Determinanten

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

6.7 Definition/Bemerkung

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$.

Die i-j-Streichungsmatrix A'_{ij} ist dann definiert durch

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in K^{(n-1) \times (n-1)}.$$

Das algebraische Komplement (der Kofaktor) zum Matrix-Element (a_{ij}) ist $(-1)^{i+j} \det(A'_{ij})$.

Die zu A komplementäre Matrix ist definiert als $\tilde{A} = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A'_{ji})$.

$$\text{Es gilt } A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \det(A) \cdot I_n = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{pmatrix}.$$

Beweis:

$$(\tilde{A} \cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} a_{kj} = \sum_k (-1)^{i+k} \cdot \det(A'_k) a_{kj}.$$

$$\text{Es ist } \det(A'_{ki}) = (-1)^{k+1} \det_k \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$(\tilde{A} \cdot A)_{ij} = \sum_k \underbrace{(-1)^{i+k} \cdot (-1)^{i+k}}_1 \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_k, \dots, \vec{a}_n) a_{kj} = (-1)^{k+1} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_k, \dots, \vec{a}_n) =$$

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \sum_{k=1}^n a_{kj} \vec{e}_k, \dots, \vec{a}_n) = \begin{cases} \det(A) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

($A \cdot \tilde{A}$) analog

Falls A invbar, so offenbar $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}$.

6.8 Entwicklungssatz von Laplace

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ ist $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})$ (Entwicklungssatz nach der i-ten Zeile, $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig)

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ ist $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})$ (Entwicklungssatz nach der j-ten Spalte, $j \in \{1, \dots, n\}$ beliebig)

Beweis:

$$\det(A) = (A \cdot \tilde{A})_{ii} = \sum_{j=1}^n \underbrace{A_{ij}}_{a_{ij}} \cdot \underbrace{\tilde{A}_{ji}}_{\det(A'_{ij}) \cdot (-1)^{i+j}} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})$$

($(-1)^{i+j}$: Vorzeichen nach „Schachbrettregel“)

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \det(A) = (+1) \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_0 - 4 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_5 + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -20$$

6.9 Cramersche Regel

Für $A \in GL(n, K)$, $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ und $b \in K^n$ ist die eindeutige Lösung des lin.

Gl. Systems $Ax = b$ gegeben durch $x_i = \frac{\det(a_1, \dots, \overbrace{b}^i, \dots, a_n)}{\det(A)}$

Beweis:

$$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A} b$$

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{j=1}^n \underbrace{\tilde{A}_{ij}}_{\substack{\text{Kofaktor} \\ \text{zu } a_{ji}}} b_j = \frac{\det(a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)}{\det(A)}$$

6.10 Bemerkung

- 1) Für $n \geq 3$ ist die Cramer-Regel eher ungeeignet zur Lösungsberechnung (Rechenaufwand, Rundungsfehler)
- 2) Praktische Berechnung von Determinanten:

Addition von Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen ändert die Determinante nicht.

z.B: Dreiecksgestalt erzeugen:
$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Variante: möglichst viele Nullen erzeugen, dann Entwicklungssatz!

7 Summen und direkte Summen von Unterräumen

7.1 Definition

Sei W ein K -Vraum und seien $U, V \subset W$ Unterräume.

Man setzt: $U + V := \{w \in W \mid \exists u \in U, \exists v \in V : w = u + v\}$

$U+V$ ist Unterraum von W (klar). („Summe von U und V “)

Die Summe heißt direkt, falls $U \cap V = \{0\}$. Notation $W = U \oplus V$

7.2 Satz

Für Unterräume U, V von W sind äquivalent:

- 1) $W = U \oplus V$
- 2) $\forall w \in W \exists_1 u \in U \exists_1 v \in V : w = u + v$

Beweis:

1) \Rightarrow 2) Sei $W = U \oplus V$.

Dann existiert zu $w \in W$ jedenfalls $u \in U$ und $v \in V$ mit $w = u + v$.

Sei $\tilde{u} \in U, \tilde{v} \in V$ mit $w = \tilde{u} + \tilde{v}$. Dann $\tilde{u} + \tilde{v} = u + v$, also $\underbrace{\tilde{u} - u}_{\in U} = \underbrace{v - \tilde{v}}_{\in V}$.

Somit $(u - \tilde{u}) \in \underbrace{U \cap V}_{\{0\}}, (v - \tilde{v}) \in \underbrace{U \cap V}_{\{0\}} \Rightarrow u = \tilde{u}, v = \tilde{v}$

2) \Rightarrow 1) Gelte 2). Dann existiert zu $w \in W$ $u \in U, v \in V$ mit $w = u + v$, also $W \subset (U + V)$. „ \subset “ klein, also $W = U + V$.

Zu Zeigen: Summe $U + V$ ist direkt, also $U \cap V = \{0\}$.

Sei $w \in U \cap V$. $w = w[\in U] + 0[\in V] = 0[\in U] + w[\in V]$.

Wegen Eindeutigkeit: $w = 0$.

Bemerkung/Beispiel:

Falls b_1, \dots, b_n Basis von W (K -Vraum), so ist $W = K \cdot b_1 \oplus K \cdot b_2 \oplus \dots \oplus K \cdot b_n$
(hierbei $K \cdot b_j = \{\lambda \cdot b_j | \lambda \in K\}$).

$$\text{z.B.: } \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dabei direkte Summen für mehr als zwei Unterräume entsprechend

7.3 Satz

Sei W endlichdimensionaler K -Vraum und $u, V \subset W$ Unterräume.

Dann ist $\dim(U + V) = \dim(u) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$

Beweis:

Sei d_1, \dots, d_k Basis von $U \cap V$.

Es ex. $u_1, \dots, u_l \in U$ und $v_1, \dots, v_m \in V$, so dass

$(u_1, \dots, u_l, d_1, \dots, d_k)$ Basis von U

$(v_1, \dots, v_m, d_1, \dots, d_k)$ Basis von V

(jeweils weglassen, falls $U \cap V = \{0\}$ oder $U \cap V = U$ etc.)

Behauptung: $(u_1, \dots, u_l, d_1, \dots, d_k, v_1, \dots, v_m)$ ist Basis von $U + V$.

Beweis:

1) Erzeugenden System: $\text{span}(\dots) \subset U + V$ klar.

„ \subset “: Sei $w \in (U + V)$, $w = u + v$.

Dann ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_l, \mu_1, \dots, \mu_k$

mit $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_l u_l + \mu_1 d_1 + \dots + \mu_k d_k$

und $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_l, \tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_k$

mit $v = \tilde{\lambda}_1 v_1 + \dots + \tilde{\lambda}_l v_l + \tilde{\mu}_1 d_1 + \dots + \tilde{\mu}_k d_k$

Somit $w = u + v$

$= \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_l u_l + (\mu_1 + \tilde{\mu}_1) d_1 + \dots + (\mu_k + \tilde{\mu}_k) d_k + \tilde{\lambda}_1 v_1 + \dots + \tilde{\lambda}_m v_m$
 $\in \text{span}(\dots)$

2) lin. unabhängig:

Sei $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_l u_l + \mu_1 d_1 + \dots + \mu_k d_k + \vartheta_1 v_1 + \dots + \vartheta_m v_m = 0$

(*Farbe* \wedge *Farbe* =: $a \in U$, *Farbe* \wedge *Farbe* =: $b \in V$).

Also auch $a \in U \cap V$, $b \in U \cap V$.

Da (d_1, \dots, d_k) Basis von $U \cap V$ ex. $\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_k$ mit $a = \tilde{\mu}_1 d_1 + \dots + \tilde{\mu}_k d_k$.

Da $(u_1, \dots, u_l, d_1, \dots, d_k)$ Basis von U folgt: $u_1 = \dots = u_l = 0$.

Analog $\vartheta_1 = \dots = \vartheta_m = 0$. Da d_1, \dots, d_k lin. unabh. folgt: $\mu_1 = \dots = \mu_k = 0$

Behauptung gezeigt!

Folgt:

$$\begin{aligned} \dim(U + V) &= l + k + m = \dim(U) + m = \dim(U) + m + k - k \\ &= \dim(U) + \dim(V) - k = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) \end{aligned}$$

8 Eigenwerte und Eigenvektoren

8.1 Definition

Sei V K -Vraum und $f \in \text{End}_K V$.

- $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von f , falls $v \in V \setminus \{0\}$ ex. mit $f(v) = \lambda v$.
 v heißt dann ein Eigenvektor (EV) von f zum Eigenwert (EW) λ .
- Sei $A \in K^{n \times n}$ heißt Eigenwert von A , falls $w \in K^n \setminus \{0\}$ ex. mit $Aw = \lambda w$ (w heißt Eigenvektor von A zu EW λ)

8.2 Definition und Bemerkung

Für $f \in \text{End}_K V$ bzw. $A \in K^{n \times n}$ und einem EW λ von f (bzw. A)

sei $E_\lambda(f) := \{v \in V | f(v) = \lambda v\}$ bzw. $E_\lambda(A) := \{v \in K^n | Av = \lambda v\}$

(geometrischer Eigenraum zum EW λ)

$E_\lambda(f)$ ((A)) ist Unterraum von V bzw. $K^{n \times n}$. Es ist $E_\lambda(f) = \text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_V - f)$
bzw. $E_\lambda(A) = \text{Ker}(\lambda \cdot \text{id}_{K^n} - \hat{A})$.

Übliche Schreibweise „ $\lambda - f$ “ bzw. „ $\lambda - \hat{A}$ “

Weiter sei $G_\lambda(f) := \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{Ker}((\lambda \cdot \text{id} - f)^j) = \{v \in V | \exists j \in \mathbb{N} : (\lambda \cdot \text{id} - f)^j(v) = 0\}$ (entspr. $G_\lambda(A)$).

„Verallgemeinerter Eigenraum“ bzw. „algebraischer Eigenraum“ von f (A) zum EW λ .

Offenbar $E_\lambda \subset G_\lambda$.

8.3 Bemerkung

n Eigenvektoren v_1, \dots, v_n von f (A) zu paarweisen verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von f (A) sind stets linear unabhängig.

8.4 Definition und Bemerkung: Charakteristisches Polynom

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und $\dim_K V = n \in \mathbb{N}$ und $f \in \text{End}_K V$. Sei \mathcal{B} eine Basis von V und $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

Die Funktion $K \ni \lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A) =: P_f(\lambda)$ auch $P_A(\lambda)$ heißt charakteristisches Polynom von f bzw. A und ist unabhängig von \mathcal{B} .

Es ist $P_A(\lambda) = \lambda^n - \text{spur}(A)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$ mit $\text{spur}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$, falls $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

Beweis:

Sei \mathcal{B}' weitere Basis, $A' := M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)}_A = \underbrace{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id})}_{T^{-1}} \cdot \underbrace{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)}_{A'} \cdot \underbrace{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id})}_T$$

Es ex. $T \in \text{Gl}(n, K)$ mit $A = T^{-1} \cdot A' \cdot T$.

Für $\lambda \in K$: $\det(\lambda I_n - A)$

$$= \det(\lambda I_n T^{-1} \cdot A' \cdot T) = \det(T^{-1} \cdot \lambda I_n \cdot T - T^{-1} \cdot A' \cdot T)$$

$$= \det(T^{-1} \cdot (\lambda I_n - A') \cdot T) = \det(T^{-1}) \cdot \det(\lambda I_n - A') \cdot \det(T) = \det(\lambda I_n - A')$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$$

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^n - \lambda^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn}) + \dots + P_A(0)$$

$$= \lambda^n - \lambda^{n-1} \operatorname{spur}(A) + \dots + (-1)^n \det(A)$$

Speziell für $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$: $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{spur}(A) + \det(A)$

$$\text{NS: } \frac{\operatorname{spur}(A) \pm \sqrt{\operatorname{spur}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$$

8.5 Bemerkung und Definition: Algebraische und geometr. Vielfachheit von EW

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, $\dim_K V = n$, $f \in \operatorname{End}_K(V)$.

a) Für $\lambda \in K$ gibt λ EW von $f \Leftrightarrow P_f(\lambda) = 0$

b) Falls λ EW von f , so sei

$$\nu_{\text{geom}}(\lambda) := \dim_K(E_\lambda) \text{ (geom. Vielfachheit),}$$

$$\nu_{\text{alg}}(\lambda) := \text{Vielfachheit von } \lambda \text{ als Nullstelle von } P_f \text{ (algebraische Vielfachheit).}$$

Also: Es ex. eine Polynomfunktion q mit $q(\lambda) \neq 0$,

so dass $P_A(z) = (z - \lambda)^{\nu_{\text{alg}}(\lambda)} \cdot q(z)$ für $z \in \mathbb{C}$.

Es gilt stets: $\nu_{\text{geom}}(\lambda) \leq \nu_{\text{alg}}(\lambda)$

Beweis:

zu a): Sei A darstellende Matrix von f bzgl einer Basis.

λ EW $\Leftrightarrow x \cdot \operatorname{id} - f$ nicht injektiv $\Leftrightarrow \lambda \cdot I_n - A$ nicht invertierbar

$$\Leftrightarrow \det(\lambda \cdot I_n - A) = 0 = P_A(\lambda) = P_f(\lambda).$$

zu b) Sei v_1, \dots, v_k Basis von $E_\lambda(f)$, also $k = \nu_{\text{geom}}(\lambda)$. Es ex. $w_{k+1}, \dots, w_n \in V$, so dass $(v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n)$ Basis von V .

$$\text{Dann darstellende Matrix } M_B^B(f) = A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & x \end{pmatrix} \text{ (k, n-k).}$$

$$\text{Also } P_f(z) = P_A(z) = \det(zI_n - A) = \begin{vmatrix} z - \lambda & & 0 & x \\ & \ddots & & \vdots \\ & & z - \lambda & \\ 0 & & & z - \lambda \end{vmatrix} = z - \lambda^k.$$

$$\det \begin{pmatrix} z - * & & -* \\ & \ddots & \\ -* & & z - * \end{pmatrix}, \text{ also } \nu_{\text{alg}}(\lambda) \geq k = \nu_{\text{geom}}(\lambda)$$

8.6 Definition und Satz: Diagonalisierbarkeit

Sei $\dim_K V = n \in \mathbb{N}$.

- a) $f \in \text{End}_K V$ heißt diagonalisierbar, falls es eine Basis \mathcal{B} von V aus Eigenvektoren von f gibt

$$\text{(Dann } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ mit EW } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ zu den EV } b_1, \dots, b_n, \text{ die}$$

die Basis \mathcal{B} bilden.

- b) Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Äquivalent zur Diagonalisierbarkeit von f ist: Es ex. $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, so dass $p_f(z)$ (char. Polynom) $= (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n)$ (p_f zerfällt über K in Linearfaktoren) und für jeden EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von f gilt: $\nu_{geom}(\lambda_i) = \nu_{alg}(\lambda_i), i = 1, \dots, n$

Beispiele:

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, D_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

entspr. lin. Abb. $\hat{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$ oder $\hat{A}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto Az$

$$2. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\hat{A}), P_A = (\lambda - 2)^2$$

2 EW: $\nu_{alg}(2) = 2$

$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist EV zu EW=2. Es ex. kein von b_1 lin. unabh. EV b_2 zum EW 2, denn sonst wäre $Ab_1 = 2b_1, Ab_2 = 2b_2$.

Somit für alle $x \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha b_1 + \beta b_2$ mit gewissen α, β ,

$$Ax = A(\alpha b_1 + \beta b_2) = \alpha Ab_1 + \beta Ab_2 = 2(\alpha b_1 + \beta b_2) = 2x, \text{ aber } A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \nu_{geom}(2) = 1 < \nu_{alg}(2) = 2 \Rightarrow \hat{A}$ nicht diagonalisierbar!

Beweis von b):

Sei f diagbar. Dann $\sum_{\lambda \text{ EW } \hat{f}} \dim E_{\lambda} = n \leq \sum_{\lambda \text{ EW } \hat{f}} \nu_{alg}(\lambda) \leq \text{grad von } p_f = n$.

Somit $\forall \lambda \text{ EW von } f : \nu_{geom}(\lambda) = \nu_{alg}(\lambda)$

Bezüglich einer Basis \mathcal{B} aus Eigenvektoren auf f gilt: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

mit den EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Somit $p_f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda_n \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

Umgekehrt: p_f zerfalle in Linearfaktoren und für jeden EW λ_i gelte: $\nu_{geom}(\lambda_i) = \nu_{alg}(\lambda_i) (i = 1, \dots, n)$.

Dann $n = \sum_{\lambda \text{ EW } \hat{f}} \nu_{alg}(\lambda) = \sum_{\lambda \text{ EW } \hat{f}} \nu_{geom}(\lambda) = \sum_{\lambda \text{ EW } \hat{f}} \dim E_{\lambda}$.

$(v_1^{(\lambda)}, \dots, v_{\nu_{alg}(\lambda)}^{(\lambda)})$, alle diese Vektoren bilden zusammen dann eine Basis von V (Beachte 8.3, woraus folgt, dass die Summe $v_1^{(\lambda)} E_\lambda$ direkt ist, also $\dim(\sum_{\lambda \in EW_{\nu} V} E_\lambda) = \sum_{\lambda \in EW_{\nu} V} \dim(E_\lambda) = n$). Bezgl. dieser Basis \mathcal{B} gilt dann, dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ diagonalisierbar.

8.7 Folgerung

- a) Falls $f \in \text{End}_K V$ diagbar, so ist $V = \bigoplus_{\substack{\lambda, \lambda \\ EW \text{ von } f}} E_\lambda(f)$ (direkte Summe)
- b) Falls f n verschiedene EW in K hat, so ist f diagbar.

8.8 Satz: jordanische Normalform

Sei $K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} , p_f zerfalle über K in Linearfaktoren.

Dann gilt:

- 1) Für alle EW λ von f ist $\dim(G_\lambda(f)) = \nu_{alg}(\lambda)$ und $V = \bigoplus_{\substack{\lambda, \lambda \\ EW \text{ von } f}} G_\lambda(f)$ invariant

unter $f : f(G_\lambda) \subset G_\lambda$

- 2) In jedem G_λ gibt es eine Basis bzgl der $f|_{G_\lambda} : G_\lambda \rightarrow G_\lambda$ die darst. Matrix

$$B_\lambda = \left(\begin{array}{cccc} \lambda & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & E_{\nu_{alg}(\lambda)-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right) \left. \vphantom{B_\lambda} \right\} \nu_{alg}(\lambda) \text{ mit } \varepsilon_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, \nu_{alg}(\lambda) - 1 \text{ und}$$

$$\#\{i | \varepsilon_i = 0\} = \nu_{geom}(\lambda) - 1$$

- 3) Es ex. somit eine Basis \mathcal{B} von V mit $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & B_y & \\ & & B_\mu \\ 0 & & & * \end{pmatrix}$

Beweis: siehe Fischer - Lineare Algebra. Versucht:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ hat komplexe EW } \lambda_1 = 1 + 2i, \lambda_2 = 1 - 2i, \text{ also } \hat{A}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$\text{ist diagbar bzgl. geeigneter Basis von } \mathbb{C}^2: \text{ Darst. Matrix } \begin{pmatrix} 1 + 2i & 0 \\ 0 & 1 - 2i \end{pmatrix}.$$

Aber: $\hat{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ nicht reell diagbar!

8.9 Bemerkung

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\hat{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ hat das char. Polynom p_A im Allgemeinen auch komplexe Nullstellen (in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$). Diese sind nicht EW von \hat{A} (über Körper \mathbb{R}), aber von $\underbrace{\hat{A}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}}_{\text{Komplexifizierung}}, z \mapsto A \cdot z$. (Dann, falls λ EW von $\hat{A}_{\mathbb{C}}$ mit EV v , so $\bar{\lambda}$ auch

EW von $\hat{A}_{\mathbb{C}}$ mit EV \bar{v})

Beweis:

$$Az = \lambda z \Rightarrow \overline{Az} = \overline{\lambda z} = \overline{\lambda} \cdot \bar{z} = \overline{A} \cdot \bar{z} = A \cdot \bar{z} = \bar{\lambda} \cdot \bar{z} \text{ mit } A \text{ reell.}$$

Über \mathbb{C} zerfällt das Polynom p_A in Linearfaktoren, Satz über JNF anwenden, liefert Zerlegung $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\substack{\lambda, \lambda \\ EW \ v \ \hat{A}_{\mathbb{C}}}} G_\lambda, \dim(G_\lambda) = \nu_{alg}(\lambda)$, invariant unter $\hat{A}_{\mathbb{C}}$.

Man erhält wie folgt unter \hat{A} invariante Zerlegung von \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\substack{\lambda, \lambda \\ EW \ von \ \hat{A}_{\mathbb{C}}}} \overbrace{\mathfrak{R}(G_\lambda + G_{\bar{\lambda}})}^{v_\lambda}, u_\lambda = G_\lambda \text{ falls } \lambda \in \mathbb{R}, u_\lambda = G_\lambda \oplus G_{\bar{\lambda}}, \text{ falls } \lambda \notin \mathbb{R},$$

$$\dim(v_\lambda) = \begin{cases} \nu_{alg}(\lambda) & \lambda \in \mathbb{R} \\ 2\nu_{alg}(\lambda) & \lambda \notin \mathbb{R}, \ln(\lambda) > 0 \end{cases}$$

9 Euklidische unitäre Vektorräume

Hier stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}

9.1 Definition

Eine Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ auf den \mathbb{K} -Vraum V ist eine abb. mit den Eigenschaften

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle,$$

$$\langle \lambda x, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle, \langle x, \lambda z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle.$$

Also $\forall u \in V : \langle u, \cdot \rangle: V \rightarrow \mathbb{K}$ linear, $\langle \cdot, u \rangle: V \rightarrow \mathbb{K}$ linear.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt symmetrisch, falls $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ ($\forall u, v \in V$).

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitesche Form (hermitisch), falls

$$\langle u, \lambda v + w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$\langle \lambda u + v, w \rangle = \bar{\lambda} \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

($\forall u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{K}$)

Eine sym. Bilinearform bzw. eine Hermitesche Form heißt positiv definiert $\Leftrightarrow \forall u \in V \setminus \{0\} : \langle u, u \rangle > 0$

Ein Skalarprodukt auf $V(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ (unitäres Produkt auf $V(\mathbb{K} = \mathbb{C})$) ist eine pos. def. symmetr. (hermet.) Bilinearform auf V . Dann $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eukl. oder unitärer Vraum

Beispiel:

1. $V = \mathbb{R}^n, \langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^n v_j w_j$ (Euklidisches Skalarprodukt)
2. $V = \mathbb{C}^n, \langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^n \bar{v}_j w_j$ (Standard-Skalar auf \mathbb{C})
3. $V = C^0([0, 1], \mathbb{C}), \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \bar{g}(x) dx$

9.2 Definition

Eine Norm auf dem \mathbb{K} -Vr V ist eine abb. $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \|x\|$ mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- 2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
- 3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungl.)

9.3 Bemerkung

Falls (V, \langle, \rangle) eukl. oder unitärer Vraum, so wird durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf V definiert

Beweis:

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle = \|v\|^2 + 2\Re(\langle v, w \rangle) + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2|\langle v, w \rangle| + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2,$$

$$\text{also } \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Ab hier: $(V, \|\cdot\|)$ stets euklid. oder unitär.

9.4 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Sei (V, \langle, \rangle) euklid. oder unitär. Dann (mit $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$): $\forall v, w \in V : |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ (Gleichheit genau dann, wenn v, w lin. abhängig)

Beweis:

$$\text{Falls } w = 0, \text{ sei jetzt } w \neq 0. \text{ Für } \lambda \in \mathbb{K} \text{ gilt: } 0 \leq \langle v + \lambda w, v + \lambda w \rangle = \|v\|^2 + \lambda \langle v, w \rangle + \bar{\lambda} \langle v, w \rangle + \lambda \bar{\lambda} \|w\|^2 = \|v\|^2 + 2\Re(\lambda \langle v, w \rangle) + |\lambda|^2 \|w\|^2$$

$$\text{Speziell gilt dies für } \lambda = -\frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2}, \text{ also } 0 \leq \|v\|^2 - \frac{2|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2} + \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^4} \|w\|^2 \Rightarrow 0 \leq \|v\|^2 \|w\|^2 - |\langle v, w \rangle|^2 \Rightarrow |\langle v, w \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \|w\|^2$$

9.5 Definition und Satz: Orthogonalität

- $u, v \in V$ heißen orthogonal ($u \perp v$) $\Leftrightarrow \langle uv \rangle = 0$.
Für $M \subset V$ heißt $u \perp M : \forall v \in M : \langle u, v \rangle = 0$
- Eine Summe $u_1 + u_2$ von Unterräumen von V heißt orthogonal, falls $\forall u_1 \in U_1 \forall u_2 \in U_2 : u_1 \perp u_2$ In Zeichen: $u_1 \oplus u_2$ (orth. Summen sind stets direkt)
- Für einen Unterraum $U \subset V$ sei $U^\perp := \{v \in V | v \perp U\}$ (orth. Komplement), U^\perp ist auch Unterraum v. V .

9.6 Satz

Seien $x, y \in V$.

- $x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (Pythagoras)
- $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (Parallelogram-Gleichung)

Beweis:

$$\text{a) } \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \underbrace{\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle}_{=0} = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$\text{b) } \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

9.7 Definition

Eine Familie $(V_j)_{j \in J}$ von Vektoren aus V heißt Orthonormalsystem (ONS), falls

$$\forall j, k \in J : \langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$$

Ein ONS heißt Orthonormalbasis, falls es eine Basis von V ist (ONB)

9.8 Bemerkung

Sei $U \subset V$ Unterraum, u_1, \dots, u_k ONB von U und $v \in V$.

Dann gilt: $v - \underbrace{\sum_{j=1}^k \langle u_j, v \rangle u_j}_{\text{orth.Proj.v.f}_U} \in U^\perp$

Beweis

Für $l \in \{1, \dots, k\}$ ist $\langle v - \sum_{j=1}^k \langle u_j, v \rangle u_j, u_l \rangle = \langle v, u_l \rangle - \sum_{j=1}^k \langle \langle u_j, v \rangle u_j, u_l \rangle = \langle v, u_l \rangle - \langle u_l, v \rangle = 0$

9.9 Folgerung

1) Falls $U = V$ ($k = \dim(U) = \dim(V)$), so gilt: $\forall v \in V : v = \sum_{j=1}^k \langle u_j, v \rangle u_j$

(Koeffizient von v bzgl. ONB (u_1, \dots, u_k) durch $\langle u_j, v \rangle$ gegeben)

2) $V = U \oplus U^\perp$ und für $v \in V$ ist die orth. Projektion von v auf U gegeben auf $\sum_{j=1}^k \langle u_j, v \rangle u_j$ (wobei u_1, \dots, u_k ONB von U)

Beweis

1) Klar.

2) $V = \underbrace{\sum_{j=1}^k \langle u_j, v \rangle u_j}_{\in U^\perp} + \underbrace{\sum_{j=1}^k \langle u_j, v \rangle u_j}_{\in U}$, also $V = U \oplus U^\perp$

(Orthogonalität hier klar!)

9.10 Satz

Sei (V, \langle, \rangle) eukl. oder unitärer V.r. (v_1, \dots, v_n) Basis von V . Dann wird durch

$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}, \tilde{u}_{k+1} := v_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle u_j, v_{k+1} \rangle u_j, u_{k+1} := \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\|\tilde{u}_{k+1}\|}$ (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)

eine ONB u_1, \dots, u_n definiert.

Beweisidee:

Nach 9.8: $\tilde{u}_{k+1} \perp \text{span}(u_1, \dots, u_k)$. Beachte: Für $k \in \{1, \dots, n\}$ ist $\text{span}(u_1, \dots, u_k) = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$

10 Adjungierte lineare Abb.

Sei (V, \langle, \rangle) eukl./unitär.

10.1 Definition und Bemerkung

Sei $f : V \rightarrow V$ linear. Es ex. genau eine lineare abb. $f^{ad} : V \rightarrow V$ linear, sodass $\forall w, v \in V : \langle v, f(w) \rangle = \langle f^{ad}(v), w \rangle$

f heißt selbstadjugiert (im Komplexen Fall hermitisch) falls $f = f^{ad}$.

Beispiel:

$$V = \mathbb{C}^n, \text{ Standard-Skalarprodukt } \langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^k \bar{v}_j w_j.$$

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}, f = \hat{A}, f(z) = Az$$

$$\forall v, w \in \mathbb{C}^n : \langle v, f(w) \rangle = \langle v, Aw \rangle = \overline{\langle Aw, v \rangle} = \overline{(Aw)^T \cdot v} = \overline{(\bar{A} \cdot \bar{w})^T v} = \bar{w}^T \bar{A}^T v = w^T A^T \bar{v} = (\bar{A}^T v)^T w = \langle \bar{A}^T v, w \rangle.$$

$$\text{Also } \hat{A}^{ad} = \bar{A}^T$$

10.2 Definition: spezielle Matrizen

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt hermitisch $\Leftrightarrow A = \bar{A}^T$ (im reellen Fall symmetrisch)

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt unitär (für $\mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal) $\Rightarrow \bar{A}^T \cdot A = I_n$ (Einheitsmatrix)

($A \in U(n), A^T \cdot A = I_n, A \in O(n)$)

$SU(n) := \{A \in U(n) | \det(A) = 1\}, SO(n) := \{A \in O(n) | \det(A) = 1\}$

Es gilt: $A \in U(n) \Leftrightarrow$ Spalten von A sind ONB von $\mathbb{C}^{n \times n}(\mathbb{R}^{n \times n}) \Leftrightarrow$ Zeilen von A sind ONB von $\mathbb{C}^{n \times n}(\mathbb{R}^{n \times n})$

11 Hauptachsentransformation

(V, \langle, \rangle) euklid. (unitär), $\dim(V) < \infty$

11.1 Satz

Sei $f : V \rightarrow V$ linear, hermitisch (selbstadjug.). Dann:

- Alle EW von f sind reell.
- Es ex. eine ONB aus EV von f

Beweisidee:

Induktion über $n = \dim(V)$:

- F hat einen reellen EW. Sei $v \in \mathbb{C}^n$ zugehöriger EV. $U := (\mathbb{C} \cdot v)^\perp$
- Es gilt dann: $f(U) \subset U$ (!) (benutzt: $f = f^{ad}$). Nach dieser Annahme:
 \exists ONB u_1, \dots, u_{n-1} (aus EV von f) von U. setze $u_n := \frac{v}{\|v\|}$

11.2 Folgerung

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitisch ($A = \bar{A}^T$) gilt: A ist diagonalisierbar;

Es ex. ONB aus EV von A und es ex. $O \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär (orthogonal im reellen Fall)

$$\text{mit } O^T \cdot A \cdot O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

($\bar{O}^T = O^{-1}$) wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ die EW von A sind.

