Mathematik für Physiker

Lineare Algebra

Skript zur Vorlesung von Prof. Dr. Lani-Wayda

Mitgeschrieben und getexχt von Julian Bergmann

Inhaltsverzeichnis

1 Algebraische Grundstrukturen

1.1 Definition

Sei G eine Menge.

a) Eine Verknüpfung in G ist die Abbildung $* :(a,b) \overset{G\times G\to G}{\mapsto} a*' b$.

(Häufig benutzte Symbole: $+$, $\cdot$, $\times$, ...)

b) Eine Verknüpfung $*$ in G heißt assoziativ, falls

$\forall a,b,c \in G : (a*b)*c = a*(b*c)$.

c) Ein Element $e \in G$ heißt links(rechts-)neutral, also

$\forall a \in G : e*a = a($ bzw. $a*e = a)$.

e neutral $\Leftrightarrow$ rechts- und linksneutral.

d) Die Verknüpfung $*$ habe ein neutrales Element e.

Ein Element $b \in G$ heißt links-(rechts-)invers zu a, falls

$b*a = e(\ a*b = e)$.

b invers zu a $\leftrightarrow a*b = b*a = e$.

1.2 Definition

Eine Gruppe (G,$*$) ist eine Menge G zusammen mit einer assoziativen Verknüpfung $* : G\times G \to G$, sodass gilt:

1) Es existiert ein neutrales Element $e \in G$,
2) zu jedem $a \in G$, ein inverses Element $a^-1 \in G$.

G heißt kommutativ, falls $*$ kommutativ (Abelsch) [z.B.$(\mathbb{Z},+)$]

1.3 Bemerkung

a) Damit (G,$*$) Gruppe ist, genügtdie Existenz eines links-/rechtsneutralen Elementes und links-/rechtsinveren Elementes.

b) Das neutrale ELement und die inversen Elemente in einer Gruppe sind eindeutig.

c) Es gibt nichtkommutative Gruppen.

d) Statt „$a*b$“ auch oft ab.

Beweis: Seien e_1, e_2 neutrale Elemente in der Gruppe G.

Dann $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$.

1.4 Beispiel: Permutationsgruppen

Eine Permutationsgruppe (von n Elementen) ist eine bijektive Abbildung

$\varphi : \{1,...,n\} \to \{1,...,n\}$

$\sum_n := \{\varphi | \varphi : \{1,...,n\} \hookleftarrow$ ist bijektiv$\}$: Menge aller Permutationen von n Elementen.

$\sum_n$ mit der Miteinanderausführung als Verknüpfung

$((\varphi\circ\psi)(j) = \varphi(\psi(j))$ für $j \in \{1,...,n\}$, falls $\varphi,\psi \in \sum_n)$

ist eine Gruppe.

(Neutrales Element: id (identische Abbildung); Inverses Element zu $\varphi \in \sum_n$ ist die inverse Abbildung p^-1)

Für $n \geq 3$ ist $\sum_n$ nicht kommutativ.

Definition: Sei $n \geq 2$. $\varphi \in \sum_n$ heißt Transposition falls

$i, j \in \{1, ..., n\}$ exisitiert,

$i \neq j$ mit $\varphi(i) = j, \varphi(j) = i$ und

$v, k \in \{1, ..., n\} \setminus \{i, j\} : \varphi(k) = k$.

Schreibweise: T_{ij}

Beispiele:	123 Start		$T_{23} \circ T_{12}$
	231 Ergebnis		$T_{12} \circ T_{23}$
	312 Ergebnis	$\Rightarrow$	nicht kommutativ

1.5 Definition

Ein Ring $(R, +, \cdot)$ist eine Menge mit Verknüpfungen +, $\cdot$, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1) $(R, +)$ ist kommutative Gruppe
2) $\cdot$ ist assoziativ
3) Es gelten die Distributivgesetze: $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) = (b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$

R heißt kommutativ, falls $\cdot$ kommutativ.

R heißt „Ring mit Eins“, falls $\cdot$ ein neutrales Element hat. (Schreibweise oft „1“)

R heißt „nullteilerfrei“, falls gilt $\forall a, b \in R/\{0\} : a \cdot b \neq 0$ (Hierbei ist „0“ das neutrale Element bezüglich „+“).

Bemerkung:

In einem Ring $(R, +, \cdot)$ gilt:

a) $\forall r \in R : \ 0 \cdot r = r \cdot 0 = 0$

b) Falls R mindestens 2 Elemente und ein Einselement 1 hat, so ist $0 \neq 1$

Beweis:

a)

$$
\begin{aligned}
0 \cdot r &= (0 + 0) \cdot r = (0 \cdot r) + (0 \cdot r) && \text{addiere } -0 \cdot r \\
0 \cdot r + (-0 \cdot r) &= (0 \cdot r) + (0 \cdot r) + (-0 \cdot r) \\
0 &= 0 \cdot r && \text{analog } r \cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

b) Sei $a \in R/\{0\}$; $0 = 0 \cdot a$ (nach a)) $\neq a = 1 \cdot a$ somit $0 \neq 1$.

1.6 Definition

Ein Körper $(K, +, \cdot)$ ist eine Menke K mit min. 2 Elementen und Verknüpfungen +, $\cdot$, so dass gilt:

1) $(K, +, \cdot)$ ist kommutativer Ring mit Eins
2) Zu jedem $a \in K/\{0\}$ ex. ein inverses Element a^{-1} bzgl. $\cdot$ (Gleichbedeutend: $K/\{0\}$ ist Gruppe mit d. Verkn. „$\cdot$“)

1.7 Bemerkung

Falls $(K, +, \cdot)$ ein Körper, so ist für $a, b \in K/\{0\}$ auch $a \cdot b \neq 0$

Dann $K/\{0\}$ mit der auf $K/\{0\}$ eingeschriebenen „Multiplikation“

$$\cdot\Big|_{(K/\{0\})x(K/\{0\})} : \begin{array}{l}(K/\{0\})x(K/\{0\}) \\ (a,b) \mapsto a \cdot b\end{array}$$

eine kommutative Gruppe.

1.8 Definition

Sei $(k, +, \cdot)$ ein Körper. Sei V Menge und seien

$\oplus$: $V \times V \to V$ („Vektoraddition“)

$\odot$: $k \cdot V \to V$ („Skalarmultiplikation“)

Abbildungen.

$(v, \oplus, \odot)$ heißt dann K-Vektorraum (VR über K), falls gilt:

a) $(V, \oplus)$ kommutative Gruppe

b) $\forall v, w \in V \ \forall \alpha, \beta \in R$:

1) $\left.\begin{array}{r}(\alpha + \beta) \odot V = (\alpha \odot V) + (\beta \odot V) \\ \alpha \odot (V \oplus W) = (\alpha \odot V) \oplus (\alpha \odot W)\end{array}\right\}$ Distributivgesetze

2) $(\alpha \cdot \beta) \odot V = (\beta \odot V) \odot \alpha$

3) $1 \odot V = V$ (Unitäres Gesetz)

Elemente von V heißten „Vektoren“, Elemente von K „Skalare“.

Notation: 0 für neutrale Elemente in $(V, \oplus)$, + statt $\oplus$; Keine Unterscheidung von $\cdot$ und $\odot$.

1.9 Definition/Bemerkung

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und M Menge.

Ein n-Tupel in M ist eine Abbildung aus der Mengre $1, 2, 3, ..., n \to M$.

Schreibweise oft $(x_1, ..., x_n)$ statt $x : \{1, ..., n\} \to M$.

n=2: „Paar“,

n=3: „Tripel“,

n=4: „Quadrupel“.

$M^n :=$ Menge der n-Tupel in M,

$M^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in M, i = 1, 2, ..., n\}$

b) Sei (K,+,·) Körper. Dann ist K^n mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

$(x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n, (y_1, y_2, ..., y_n) \in K^n, \lambda \in K$,

$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$,

$\lambda \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$.

Ein K-Vektorraum.

c) Wichtige Beispiele: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

1.10 Definition: Untergruppen, -räume, Normalteiler

a) Sei $(G, \cdot)$ Gruppe. Eine nichtleere Teilmenge $U \subset G$ heißt Untergruppe falls $\forall a, b \in U: \ a \cdot b^{-1} \in U$

b) Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ heißt Unter(-vektor-)raum von V falls:

  1) $\forall u, v \in U: \ u + v \in U$

  2) $\forall \lambda \in K \ \forall u \in U: \lambda u \in U$

c) Eine Untergruppe $U \subset G$ heißt Normalteiler von G (auch normal in G), falls $\forall g \in G \ \forall u \in U: \ g \cdot u \cdot g^{-1} \in U$

1.11 Bemerkung

a) Falls $U \subset G$ Untergruppe, so ist für $a, b \in U$ auch $a + b \in U$ und U ist mit der eingeschriebenen Verknüpfung $\cdot\Big|_{U \times U}: U \times U \to U$ auch Gruppe

b) Falls $U \subset V$ Unterraum ist, so ist $\left(U, +\Big|_{U \times U}: U \times U \to U, \cdot\Big|_{K \times U}: K \times U \to U\right)$ auch Vektorraum.

Beweis:

b) trivial

a) Für $A \in U$ ist $a \cdot a^{-1} \in U$, also $e \in U$ (e ist neutr. Element). Somit zu $b \in U$ auch $e \cdot b^{-1} = b^{-1} \in U$. Also U Untergruppe.

Bemerkung:

Falls $U \subset G$ Normalteiler, so kann man

1) für $a \in G$ die „Nebenklase von a“ durch $\overline{a} := a \cdot u := \{a \cdot u | u \in U\}$ definieren.

2) Auf diesen Nebenklassen eine Verknüpfung $\overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b}$ definiert.

   Beim Beweis der Wohldefiniertheit (d.h. der Unabhängigkeit von $\overline{a \cdot b}$ von dem Repräsentanten $a = \overline{a}, \ b = \overline{b}$) gilt die Normalteilereigenschaft. Die Menge der Nebenklassen wird dann mit „x“ zu einer Gruppe;

   Bei G/U, Quotienten-/Faktorgruppe (G modulo U). Falls $\#G < \infty$, so ist $\#G/U = \frac{\#G}{\#U}$

1.12 Definition: affiner Unterraum

Sei V K-Vraum. $A \subset V$ heißt affiner Unterraum, falls es einen Unterraum $U \subset V$ und ein $x_0 \in V$ gibt, sodass

$A = x_0 + U = \{y \in V | \exists u \in U: \ y = x_0 + u\} = \{x_0 + u | u \in U\}$.

(Im Allgemeinen ist so ein A kein Unterraum, nur falls $x_0 \in U$!)

1.13 Beispiel

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) | x_j \in \mathbb{R}, j = 1, ..., n\}$ ist $\mathbb{R}$-Vraum z.B. in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

Geraden durch 0 haben die Form $g_x = \{\lambda \cdot x | \lambda \in \mathbb{R}\}$ (Unterräume).

Affine Unterräume: Geraden, die typischerweise 0 nicht enthalten.

2 Homomorphismen, lineare Abbildungen

2.1 Definition

a) Seien $(G, \circ)$ und $(H, \cdot)$ Gruppen.

Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ heißt Gruppenhomomorphismus, falls

$\forall a, b \in G: \ \varphi(a \circ b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

b) Seien V, W Vektorräume über dem selben Körper K.

Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt Vektorraumhomomorphismus (oder K-linear) falls gilt:

1) $\forall u, v \in V: \ \varphi(\underbrace{u+v}_{inV}) = \underbrace{\varphi(u) + \varphi(v)}_{inW}$

2) $\forall \lambda \in K \ \forall u \in V: \ \varphi(\underbrace{\lambda \cdot u}_{inK\times V\to V}) = \underbrace{\lambda \cdot \varphi(u)}_{inK\times W\to W}$

c) Ähnlich: Ring- und Körperhomomorphismus, wobei zusätzlich $\varphi(1) = 1$ gefordert wird

2.2 Definition

Sei $\varphi : V \to W$ Homomorphismus (Gruppen-, Vektorraum-, etc.)

φ heißt	Monomorphismus	falls	φ injektiv
"	Epimorphismus	falls	φ surjektiv
"	Isomorphismus	falls	φ bijektiv
"	Eudomorphismus	falls	V=W
"	Automorphismus	falls	V=W und φ bijektiv

2.3 Definition

Seien U, V, W K-Vektorräume und $\varphi : U \to V$ sowie $\psi : W \to W$ beide K-linear. Dann auch $\psi \circ \varphi : U \to W$ (Entsprechend für alle Gruppenhomomorphismen etc.)

Beweis:

(leicht), z.B. $(\psi \circ \varphi)(x+y) = \psi(\varphi(x+y)) = \psi(\varphi(x) + \varphi(y))$

$= \psi(\varphi(x)) + \psi(\varphi(y)) = (\psi \circ \varphi)(x) \circ (\psi(\varphi))(y)$

2.4 Definition/Bemerkung

Sei $\varphi : V \to W$ Homomorphismus (Vr.- oder Gruppen-) dann gilt:

a) $\text{Bild}(\varphi) := \{y \in W | \exists x \in V: \ \varphi(x) = y\}$ ist Unterraumvon W (-gruppe).

b) $\text{Ker}(\varphi) := \{x \in V | \varphi(x) = 0\}$ ist Unterraum von V (in „Gruppenfall“: Normalteiler von V)

2.5 bemerkung

Sei $\varphi : V \to W$ Vektorraumhomomorphismus. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi \text{ injektiv } &\Leftrightarrow_1 \forall x \in V: \ [\varphi(x) = 0 \Rightarrow x = 0] \quad * \\ &\Leftrightarrow_2 Ker(\varphi) = \{0\} \end{aligned}$$

Beweis:

„$\Rightarrow_1$“ Sei φ injektiv. Sei $x \in V,\ \varphi(x) = 0$. Z.z. $x = 0$. Es ist $\varphi(0) = 0$ (stets für lineare Abbildungen). Da φ injektiv ist $x = 0$.

„$\Leftarrow_1$“ Seien $x, y \in V,\ \varphi(x) = \varphi(y)$. Z.z. $x = y$. $0 = \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y)$, also $x - y = 0$, $x = y$

„$\Rightarrow_2$“ Falls $*$ gilt, so $Ker(\varphi) < \{0\}$, „$\supset$“ klar, da $Ker(\varphi) = \{0\}$

„$\Leftarrow_2$“ Sei $Ker(\varphi) = \{0\}$. Sei $x \in V,\ \varphi(x) = 0$, dann $x \in Ker(\varphi)$, also $x = 0$

2.6 Bezeichnung

Für K-Vräume V, W sei

$Hom_R(V, W) := \{\varphi : V \to W | \varphi$ ist K-linear$\}$

$End_K V := \{\varphi : V \to V | \varphi$ ist K-linear$\}$

3 Lineare Unabhängigkeit, Basen, Dimensionen

Sei stets K Körper, V ein K-Vraum.

Für eine Indexmenge I ist eine Familie $(W_i)_{i\in I}$ von Vektoren aus V ist eine Abbildung von
$I \to V$
$i \to v_i$

3.1 Definition

Sei $(V_i)_{i\in I}$ Familie von Vektoren in V. Dann heißt

$span[(V_i)_{i\in I}] := \{w \in V | \exists k \in \mathbb{N},\ \lambda_1 \cdot \lambda_k \in K,\ i_1, ..., i_k \in I\ mit\ w = \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_k \cdot v_k\}$

Linearkombination von Vektoren aus der Form $(V_i)_{i\in I}$ der von $(V_i)_{i\in I}$ erzeugte Unterraum von V.

3.2 Definition

a) $(V_i)_{i\in I}$ heißt Erzeugendensystem von V, falls $span[(V_i)_{i\in I}] = V$.

b) $(V_i)_{i\in I}$ heißt linear unabhängig, falls gilt:

   Falls $k \in W,\ \lambda_1, ..., \lambda_k \in K,\ i_1, ..., i_k \in I$ und $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_{ik} = 0$, so gilt $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$, sonst linear abhängig.

c) $(V_i)_{i\in I}$ heißt Base von V, falls $(V_i)_{i\in I}$ linear unabhängig und Erzeugendensystem von V

3.3 Bemerkung

Falls $(V_i)_{i\in I}$ und $(W_j)_{j\in J}$ Familien in V und $v_{i_1} \neq v_{i_2}$

falls $i_1, i_2 \in I,\ i_1 \neq i_2$ und $\{v_i | i \in I\} \subset \{w_j | j \in J\}$.

Dann:

i) $(W_j)_{j\in J}$ linear unabhängig $\Rightarrow (V_i)_{i\in I}$ l.u.

ii) $(V_i)_{i\in I}$ Erzeugendensystem von V $\Rightarrow (W_j)_{j\in J}$ Erzeugendensystem

3.4 Satz

Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $(v_1, ..., v_k)$ und $(W_j)_{j\in J}$ zwei Basen von V. Damit ist $\#J = K$.

Die Länge einer Basis von V ist also, falls V endliche Basis hat, eindeutig bestimmt. Diese Zahl heißt Dimension von V über K.

In Zeichen: $dim_K V$.

Bemerkung:

Häufig auch Angabe von Basen/Erzeugendensystemen etc. als Menge, z.B. „$\{v_1, v_2, v_3\}$ Basis von $\mathbb{R}^3$“ (Gemeint: Die Familie, wo jedes Element der Menge genau einmal vorkommt).

3.5 Hilfssatz

Sei K Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in K,\ i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., n+1$.

Damit hat das homogene lineare Gleichungssystem

$$(S_n) \begin{cases} a_{11} \cdot x_1\ a_{12} \cdot x_2\ ...\ a_{1n+1} \cdot x_{n+1} = 0 \\ a_{21} \cdot x_2\ a_{22} \cdot x_2\ ...\ a_{2n+1} \cdot x_{n+1} = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1\ a_{n2} \cdot x_2\ ...\ a_{nn+1} \cdot x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

von n Gleichungen für n+1 Variabeln $x_1, ..., x_{n+1}$ eine $\underbrace{\text{nichttriviale}}_{\text{nicht alle } x_i=0}$

Lösung $(x_1, ..., x_{n+1}) \in K^{n+1}$

3.6 Lemma

Sei V ein K-Vraum, $n \in \mathbb{N}$ mit $(v_1, ..., v_n)$ Erz.sys. von V sowie $(w_1, ..., w_m)$ linear unabhängige Familie. Dann $m \leq n$.

Beweis:

Annahme: m¿n. Dann m¿n+1 und auch $(w_1, ..., w_m)$ l.u. Für j=1,...,n+1 ex. $a_{ij} \in K,\ i = 1, ..., n$ mit $w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot v_i$, da $(v_1, ..., v_n)$ Erz.sys.

Nach Hilfssatz ex. $x_1, ..., x_{n+1}$ nicht alle 0, so dass $\sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} \cdot x_j = 0,\ i = 1, ..., n$.

Es folgt $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot w_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j\right)}_{0} v_i = 0$

Widerspruch zu $(w_1, ..., w_{1+n})$ l.u. Folgt: $m \leq n$

Beweis von Satz 3.4:

Sei $(v_1, ..., v_n)$ Basis von V, $(W_j)_{j\in J}$ ebenfalls für jede Teilmenge $\{j_1, ..., j_m\} \subset J$ gilt: $w_{j1}, ..., w_{jm}$ ist l.u., da $(W_j)_{j\in J}$ l.u.

Nach 3.6 $m \leq n$ folgt: J endlich, $\#J \leq n$. Sei $m := \#J (m \leq n)$, ohne Einschränkung sei $i = \{1, ..., m\}$. $(w_1, ..., 1_m)$ ist Basis von V, insbes. Erz.sys. $(v_1, ..., v_n)$ ist Basis von V, insbes. l.u.

$\Rightarrow\ n \leq m$. Zusammen: $m = n$

3.7 Austauschlemma

Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis des K-Vraumes V und sei $w \in V,\ i \in \{1, ..., n\}$. Genau dann ist $(v_1, ..., v_{i-1}, w, v_{i+1}, ..., v_n)$ wieder Basis von V, wenn gilt:

In der eindeutigen Basisdarstellung $w = \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_i \cdot v_i + ... + \lambda_n v_n$ ist $\lambda_i \neq 0$.

3.8 Satz

Sei $\{0\} \neq U,\ U \subset V$ Unterraum, $k \in \mathbb{N},\ v_1, ..., v_k \in U$. Äquivalent sind:

i) $(v_1, ..., v_k)$ ist Basis von U.

ii) $(v_1, ..., v_k)$ ist maximal l.u. uin U d.h. $(v_1, ..., v_k)$ ist l.u. und für $w \in U$ ist $(v_1, ..., v_k, w)$ nicht l.u.

iii) $(v_1, ..., v_k)$ ist minimales Erz.sys. von U, d.h. $(v_1, ..., v_k)$ ist Erz.sys. und für $j \in \{1, ..., k\}$ ist $(v_1, ..., v_i, ..., v_k)$ kein Erz.sys. von U.

iv) Jeder Vektor $w \in U$ lässt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination der v_j darstellen, $w = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j v_j$

Beweis (Ringschluss):

(i)⇒(ii): Sei $(v_1, ..., v_k)$ Basis von U. Dann ist $(v_1, ..., v_n)$ l.u. Sei $w \in U$. Da $(v_1, ..., v_k)$ auch Erz.sys. von U ex. $\lambda_1, ..., \lambda_k \in K$ mit $w = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$.

Also $0 = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k - w$

(ii)⇒(iii): Sei $(v_1, ..., v_n)$ max. l.u. $(v_1, ..., v_k)$ ist Erz.sys. Sei $w \in U$. Dann $(v_1, ..., v_k, w)$ nicht l.u., also ex. $\lambda_1, ..., \lambda_{k+1}$ mit $0 = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1}$ nicht alle $\lambda_i = 0$.

Wäre $\lambda_{k+1} = 0$, so wegen $v_1, ..., v_k$ l.u. auch $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$. Widerspruch, also $\lambda_{k+1} \neq 0$. Folgt: $w = \sum\limits_{j=1}^{k} (-\lambda_{k+1}^{-1} \cdot \lambda_1) \cdot v_j$, also $w \in \mathit{span}(v_1, ..., v_k)$.

$(v_1, ..., v_k)$ ist minimales Erz.sys. Für $i \in \{1, ..., k\}$ ist $(v_1, ..., v_i, ..., v_k)$ kein Erz.sys, sonst würden $\lambda_1, ..., \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, ..., \lambda_k$ ex. mit $v_i = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{i-1} v_{i-1} + v_{i+1} \lambda_{i+1} + .. + \lambda_k v_k$.

Dann $0 = \lambda_1 v_1 + ... \underbrace{-1}_{\neq 0} - v_i + ... + \lambda_k v_k$.

Widerspruch zu $(v_1, ..., v_k)$ l.u.

(iii)⇒(iv): Jeder Vektor $w \in U$ hat Darstellunge $w = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$, da $(v_1, ..., v_l)$ Erz.sys.

Eindeutigkeit: Sei $w \in U,\ w = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$. Z.z. $\lambda_j = U_j$ für $j = 1, ..., k$. Es ist $0 = \sum\limits_{j=1}^{k} (\lambda_j - \mu_j) v_j$. Falls $j_0 \in \{1, ..., k\}$ ex. mit $\lambda_{j_0} - \mu_{j_o} \neq 0$, so folgt: $v_{j_0} = -(\lambda_{j_0} - \mu_{j_0})^{-1} \sum\limits_{j=1}^{k} (\lambda_j - \mu_j) v_j$, also $v_{j_0} \in \mathit{span}(v_1, ..., \cancel{v_{j_0}}, ..., v_k)$. Dann $(v_1, ..., \cancel{v_{j_0}}, ..., v_k) = \mathit{span}((v_1, ..., v_k))$ Widerspruch zu $(v_1, ..., v_k)$ min. Erz.sys.

Also: $\lambda_j = \mu_j$ für $j = 1, ..., k$.

(iv)⇒(i): Erz.sys. klar. l.u.: Sei $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0$. Auch $0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_k = 0$. Mit Eindeutigkeit der Darstellung $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$, also $(v_1, ..., v_k)$ l.u.

Zusammen: $(v_1, ..., v_k)$ basis.

3.9 Folgerung

Sei V ein K-Vraum der Dimension $n \in N$.

a) n l.u. Vektoren $v_1, ..., v_m$ sind stets Basis von V

b) n Vektoren $v_1, ..., v_n$ die Erz.sys. von V bilden, sind Basis von V

c) Falls $(v_1, ..., v_n)$ l.u. und $1 \leq k < n$, so ex. Basis $(v_1, ..., v_k, v_{k+1} ..., v_n)$ von V

Beweis:

a) Seien $v_1, ..., v_n$ l.u. Falls $w \in V,\ w \notin span(v_1, ..., v_k)$, so auch $(v_1, ..., v_n, v_w)$ l.u. und w hat Erz.sys. Widerspruch zu Lemma 3.6.

Also $(v_1, ..., v_n)$ auch Erz.sys. von V, sonst Basis.

b) Falls $(v_1, ..., v_n)$ linear abhängig, so ex. $j_0 \in \{1, ..., n\}$ mit $span(v_1, ..., v_n) = span(v_1, ..., \cancel{v_{j_0}}, ..., v_n)$, also $(v_1, ..., \cancel{v_{j_0}}, ..., v_n)$ Erz.sys. Nach Lemma 3.6, da $(b_1, ..., b_n)$ (Basis) l.u: $n \leq n^{-1}$. Widerspruch!

Also $(v_1, ..., v_n)$ l.u. also Basis.

c) $(v_1, ..., v_k)$ ist keine basis, da $k < n = dim_K V$, also $(v_1, ..., v_k)$ kein Erz.sys. Also $v_{k+1} \in V_j,\ v_{k+1} \notin span(v_1, ..., v_k)$. Dann $(v_1, ..., v_k, v_{k+1})$ l.u. (Beweis leicht).

Falls $k + 1 = n$, so fertig (dann nach a)$(v_1, ..., v_{k+1})$ Basis.

Sonst: Diesen Schritt wiederholen, liefert $v_{k+2}, v_{k+3}, ..., v_n$

3.10 Satz

Seien V, W k-Vräume, beide mit Dimension $n \in N$ und $f \in Hom_K(v_j w)$ (d.h. $f : V \to W$ ist K-linear). Dann sind äquivalent:

i) f ist Isomorph (d.h. bijektiv)

ii) f ist surjektiv

iii) f ist injektiv

iv) Für jede Basis $(v_1, ..., v_n)$ von V ist $(f(v_1), ..., f(v_n))$ Basis von W.

Beweis:

(i)⇒(ii): trivial

(ii)⇒(iv): Sei $(v_1, ..., v_n)$ Basis von V. Dann $(f(v_1), ..., f(v_n))$ Erz.sys von Bild(f), denn falls $w = f(v) \in Bild(f)$ (mit einem $v \in V$), so hat V Darstellung $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ und somit $w = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n)$. Da f surjektiv ist Bild f:W. Also $(f(v_1), ..., f(v_n))$ Erz.sys. von W. Nach 3.9: auch Basis von W.

(iv)⇒(iii): Annahme: $\exists v \neq 0,\ f(v) = 0$. Nach 3.9c) ex. Basis $(v_1, ..., v_n)$ von V. Dann auch $(f(v1), ..., f(v_n))$ Basis von W. Insbesondere $f(v) \neq 0$. Widerspruch.

Also: $Ker(f) = \{0\}$, für injektiv (vgl. 2.5) (iii)⇒(i) Sei $(v_1, ..., v_n)$ Basis von V. Behauptung: $(f(v_1), ..., f(v_n))$ l.u. (in W).

Beweis: Falls $\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = 0$, so $0 = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i)$ (f linear), also, da f injektiv, $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$, also $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ f linear, da $(v_1, ..., v_n)$ l.u.

Mit 3.9b) folgt: $(f(v_1), ..., f(v_n))$ Basis von W, insbes. Erz.sys. zu $w \in W$ ex. also $\lambda_1, ..., \lambda_n$ mit $w = \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) \in Bild(f)$, also f surjektiv, insgesamt bijektiv.

4 Lineare Abbildungen und Matrizen

Sei K Körper. Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei $K^{m\times n} : \{\underbrace{(a_{ij})_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,..,n}}}_{Familie} | a_{ij} \in K, \substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}\}$

Abb. $\{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} \to k$

$(i, j) \mapsto a_{ij}$

$$\text{Schreibweise: } A = (a_{ij}) = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,..,n}} = m \updownarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \to n$$

4.1 Bemerkung/Definition

Seien V, W K-Vräume und $n = dim_K V$, $m = dim_K W$ und $f \in Hom_K(V, W)$.

Seien $\mathcal{A} := (v_1, ..., v_n)$ Basis von V. $\mathcal{B} := (w_1, ..., w_m)$ Basis von W.

a) Dann ex. eindeutige Zahlen $a_{ij}, i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$, so dass gilt: $f(v_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_i \quad (j = 1, ..., n)$ (Beweis klar)

b) Die Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ heißt darstellende Matrix von f bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, in Zeichen $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Merkregel: Die i-te Spalte enthält die Koeffizienten von $f(v_j)$ bzgl. der basis $w_1, ..., w_n$.

Kurz: Die Spalten sind die Bilder der Basisvektoren.

4.2 Definition: Matrixmultiplikation

Für $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ und $B = (b_{ij}) \in K^{l\times m}$ sei $C := (c_{ij}) \in K^{l\times n} = B \cdot A$.

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}$ (c_{ij} = ite Zeile von B und jte Spalte von A)

(Spaltenzahl von B muss Zeilenzahl von A sein, damit $B \cdot A$ definiert ist.)

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5\,6 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \; B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ -4 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

4.3 Satz: Kompositionen linearer Abbildungen und Matrixmultiplikationen

Seien U, V, W K-Vräume mit Dimensionen n,m,l und Basen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$. Sei $f \in Hom_k(U,V)$ und $g \in Hom_K(V,W)$ und $A := M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f),\ B := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(g)$.

Dann ist $B \cdot A = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(g \circ f)$, also $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(g \circ f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(g) \cdot M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$.

Beweis:

Sei $\mathcal{A} = (u_1, ..., u_n),\ \mathcal{B} = (v_1, ..., v_m),\ \mathcal{C} = (w_1, ..., w_n)$.

Für $i \in \{1, ..., m\}$ ist $g(v_i) = \sum\limits_{i=1}^{l} b_{ki} \cdot w_k$ und für $j = 1, ..., n$ ist $f(a_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} v_i$. Somit für $j = 1, ..., n$ $(g \circ f)(u_j) = g\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} v_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ij} \cdot g(v_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot \left(\sum\limits_{k=1}^{l} b_{ki} w_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{l} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki} \cdot a_{ij}\right)}_{=(B \cdot A)_{kj}} w_k$

Also $[M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}(g \circ f)]_{kj} = (B \cdot A)_{kj},\quad k = 1, ..., l,\quad j = 1, ..., n.$

4.4 Bemerkung

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $K^{n \times n}$ (mit komponentenweiser Addition und Matrixmultiplikation als Verknüpfungen) ein Ring mit Eins (Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

Im Allgemeinen nicht kommutativ.

Allgemeiner Fall: Vektoren werden durch Elemente von K^n beschrieben bzgl. einer Basis $B = (v_1, ..., v_n)$ des Vraumes V, also $x = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$.

$(x_1, ..., x_n) \in K^n$ heißt „Koordinatenvektor“ von x bzgl. der basis B.

4.5 Bemerkung

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i = 1, ..., m \\ j = 1, ..., n}} \in K^{m \times n}$ induziert eine lineare Abbildung.

$\hat{A} : K^n \to K^m$, (d.h.:$(A \cdot x)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\quad i = 1, ..., m$)

bzgl. der Einheitsbasen $\mathcal{E}_n = (e_1, ..., e_n),\ \mathcal{E}_m = (\hat{e_1}, ..., \hat{e_n})$ von K^n über K^m gilt: $M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(\hat{A}) = A$.

Beweis:

Z.z. $\hat{A}(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{e}_i$

$\hat{A}(e_j) = Ae_j$, $(Ae_j)_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \underbrace{(e_j)_k}_{\delta_{jk}} = a_{ij}$

Also $A \cdot e_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot \hat{e}_i$

z.B. $3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\7\end{pmatrix}$

4.6 Satz: Invertierbare Matrizen, Basisvektoren

a) $A \in K^{n\times n}$ heißt invertierbar $\Leftrightarrow$ $\exists B \in K^{n\times n}: \; B \cdot A = I_n, \quad I_n = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\ddots&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$(n \times n$ Einheitsmatrix)

In diesem Fall ist B eindeutig bestimmt und es gilt auch $A{\cdot}B = I_n$. Schreibweise: $B = A^{-1}$ (inverse Matrix)

Die Gruppe (!) der invertierbaren $n \times n$ Matrizen mit Elementen aus K wird mit GL(n,K) bezeichnet. Für $A, B \in GL(n,k)$ ist $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

b) Sei V K-Vraum, $dimV = n$ und $f \in End_K V$ und seien $B,\ B'$ Basen von V.

Dann gilt: f ist Homomorphismus $\Leftrightarrow$ $M_{B'}^{B}(f)$ invertierbar.

c) Sei $A := M_B^B(f), A' = M_{B'}^{B'}$. Mit $T := M_{B'}^{B} \underbrace{(id_v)}_{\substack{ident.Abb.\\ x \mapsto x}} \in K^{n\times n}$ gilt dann:

$A = T^{-1} \cdot A' \cdot T$, also $M_B^B(id_v) = (M_B^{B'}(id_v)) \cdot M_B^{B'}(f) \cdot M_B^B(id_v)$

d) Zwei Matrizen $A,\ \tilde{a} \in K^{n\times n}$ heißen ähnlich, falls $T \in GL(n,k)$ ex. mit $A = T^{-1} \cdot A \cdot T$

Beweis:

zu a) Seien $\hat{A}, \hat{B} : K^n \to K^n$ die durch Multiplikation mit A bzw. B erzeugten lin. Abbildungen ($x \mapsto Ax$ bzw. $x \mapsto Bx$). Dann $(\hat{A} \circ \hat{B})(x) = B \cdot (Ax) = (B \cdot A)x = x$ also (vgl. Übg.) $\hat{B}$ surj., $\hat{A}$ inj. Nach 3.10: $\hat{A}$ bij., $\hat{B}$ bij., $\hat{B} = \hat{A}^{-1}$, auch $\hat{A} \circ \hat{B} = id_{K^n}$.

Also $\forall \underbrace{x : \hat{A}(\hat{B}(x))}_{(A\cdot B)x} = x$. Folgt: Auch $A \cdot B = I_n$.

zu b) „$\Rightarrow$" f Isom $\Rightarrow$ $\exists g \in End_K V,\ g \circ f = id_V$. Nach 4.3: $M_B^B(g \circ f) = M_B^B(g \circ f) M_B^B(id_V) = I_n = M_B^{B'}(g) \circ M_{B'}^{B}(f)$, also $M_{B'}^{B}(f)$ invertierbar.

„$\Leftarrow$" Sei $M_B^{B'}(g \circ f)$ invertierbar mit inv. Matrix $M = (m_{ij})_{\substack{i=1,...,n\\ j=1,...,n}}$.

Def. $g : V \to V$ auch $g(b'_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} b_i$ (dabei $B' = (b'_1, ..., b'_n),\ B = (b_1, ..., b_n)$). Dann $M_B^{B'}(g) = (m_{ij}) = M$. Dann $M_B^B(g \circ f) = I_n = M_B^{B'}(g) \cdot M_{B'}^{B}(f)$, also: $(g \circ f)(b_j) = b_j$ für $j = 1, ..., n$ also $g \circ f = id_V$. Folgt: f inj., g surj. Mit 3.10 f bij. also Isomorphismus.

zu c) $f = id_V \circ f \circ id_V$, also nach 4.3: $A = M_B^B(f) = \underbrace{M_B^{B'}(id_V)}_{T^{-1}} \cdot \underbrace{M_{B'}^{B'}(f)}_{A'} \cdot \underbrace{M_{B'}^{B}(id_V)}_{T}$,

also $A = T^{-1} \cdot A' \cdot T$. (Nach 4.3: $M_B^{B'}(id_V) = M_B^B(id_V) = I_n$)

4.7 Rang und Transposition

a) Seien V,W K-Vräume, $dim_K V = n \in \mathbb{N},\ f \in Hom_K(V, W)$.

Dann definitert man $rang\ f := dim\ Bild(f)$ (Bem: Autom. $rang(f) \leq dim_K V = n$)

b) Für $A \in K^{m \times n}$ sei $rang(A) := rang(\hat{A})$ ($\hat{A} : K^n \to K^m,\ x \mapsto Ax$)

$rang(A)$ ist die max. Anzahl linear unabh. Spalten von A („Spaltenrang v. A“).

c) Für $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}} \in K^{m \times n}$ definiert man $A^T := (\tilde{a_{ij}})_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}} \in K^{n \times m},\ \tilde{a_{ij}} = a_{ji}$ (Transponierte von A)

d) Für $A \in K^{m \times n},\ B^{n \times l}$ ist $(A \cdot B)^T) = B^T \cdot A^T$ und falls $A \in Gl(n, K)$, so auch A^T, und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

e) Es gilt: $rang\ A = rang\ A^T$

f) Für den Zeilenrang von A (max. Anzahl l.u. Zeilen von A) gilt: Zeilenrang(A)=Spaltenrang(A)

Beweis:

b) Sei $A = (\vec{a_1}\updownarrow, ..., \vec{a_n}\updownarrow)$.

Dann ist für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n\ \hat{A}(x) = A \cdot x = x_1\vec{a_1} + ... + x_n\vec{a_n}$.

Also $Bild(\hat{A}) = span(\vec{a_1}, ..., \vec{a_n})$. Somit $rang(A) = rang(\hat{A}) = dim\ Bild(\hat{A}) = dim\ span(\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}) =$ max. Anzahl l.u. Spalten innerhalb von $\vec{a_1}, ..., \vec{a_n}$

d) Übung ($A \cdot B$ und A^T und B^T (Produktmatrix transponieren und vertauschen!))

e) Beweisskizze: Klar, falls A=0. Somit $r := rang\ A \geq 1$

Es ex. Basen $\mathcal{A}$ von K^n, $\mathcal{B}$ von K^m, so dass $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\hat{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\,0 \\ 0 & \ddots & 0\,0 \\ 0 & 0 & 1\,0 \\ 0 & 0 & 0\,0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$ (r = Anzahl der Spalten/Zeilen, die eine 1 enthalten).

Es ex. somit inv.bare Matrizen $S \in Gl(m, K),\ T \in G(m, k)$ mit $T \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\,0 \\ 0 & \ddots & 0\,0 \\ 0 & 0 & 1\,0 \\ 0 & 0 & 0\,0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$.

Dann $(TAS)^T = S^T \cdot A^T \cdot T^T$. Aus Invertierbarkeit von $S^T,\ T^T$ folgt $rang(A^T) = r$. Somit $rang(A^T) = Spaltenrang\ A^T = Zeilenrang\ A^T = r = Spaltenrang\ A$

5 lineare Gleichungssysteme, Matrizenumformung

5.1 Dimensionsformel

Seien V, W K-Vräume, $f : V \to W$ linear. Sei $V = n \in \mathbb{N}$- Dann $dim\ V = dim\ Ker(f) + dim\ Bild(f)$ (Dabei $dim\{0\} = 0$)

Beweis:

1) Falls $Ker(f) = \{0\}$, so ist $\tilde{f} : V \to Bild(f)$ bijektiv, also Isomorphis-
$x \mapsto f(x)$
mus, also $dim\ V = dim\ Bild(f)$
2) Falls $Ker(f) = V$, so $dim\ V = dim\ Ker(f),\ Bild(f) = 0$
3) Sonst: Wähle Basis $v_1, ..., v_k$ von $Ker(f)$ ($k \in \{1, ..., n-1\}$), ergänze zur Basis $(v_1, ..., v_w, v_{w+1}, ..., v_n)$ von V (vgl. 3.9). Sei $u := span(v_{k+1}, ..., v_n)$. Dann $\tilde{f} : U \to Bild(f)$ Isomorphismus (!), somit, da $v_{k+1}, ..., v_n$ Basis
$x \mapsto f(x)$
von U: $dim\ Bild(f) = dim\ U = n - k$. Somit $n = k + (n - k) \Leftrightarrow dim\ V = dim\ Ker(f) + dim\ Bild(f)$

Beispiel zur Transposition:

$$A : \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 4\,5\,6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1\,2 \\ 3\,4 \\ 5\,6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \quad \text{rang(A)=2}$$

$$\tilde{A} : \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,4\,6 \end{pmatrix} \quad \text{rang}(\tilde{A})\text{=1} \quad Bild(\tilde{A}) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \{\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$dim\ Bild(\tilde{A}) + dim\ Ker(\tilde{A}) = dim \mathbb{R}^3 = 3$

$$\text{z.B. } \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Ker(\tilde{A}) = \{x \in \mathbb{R}^3 | \tilde{A} \cdot x = 0\} = span(\big(-2, 1, 0\big), \big(0, 3, -2\big)) = \mathbb{R} \cdot \big(-2, 1, 0\big) + \mathbb{R} \cdot \big(0, 3, -2\big)$

Ein lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{lll} a_{11}x_1 & +...+ a_{1n}x_n = & b_1 \\ \vdots & +...+ \vdots = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +...+ a_{mn}x_n = & b_m \end{array} \quad \text{(m Gleichungen für n Variabeln } x_1, ..., x_n\text{)}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n,\ b_i \in K,\ i = 1, ..., n$) lässt sich mit $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$ als $A \cdot x = b$ schreiben. ($x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^n$ gesuchter Vektor). Offenbar lösbar $\Leftrightarrow\ b \in Bild(\hat{A})$

5.2 Bemerkung

Falls $A \cdot x = b$ lösbar und $p \in \mathbb{R}^n$ eine spezielle Lösung, so ist Lösungsmenge gleich $p + Ker(\hat{A})$ (affiner Unterraum K^n)

„Allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems = spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems + allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems.“

Beweis:

Sei b spezielle Lösung von $A \cdot x = b$, also $Ap = b$.
Falls $v \in Ker(\hat{A})$, also $Av = 0$, so $A(p + v) = \underbrace{Ap}_{b} + \underbrace{Av}_{0} = b$.

Falls $\tilde{p}$ weitere Klsung von $Ax = b$, so $A(p - \tilde{p}) = Ap - A\tilde{p} = b - b = 0$, also $v := p - \tilde{p} \in Ker(\hat{A})$ und $\tilde{p} = p - v = p + (\underbrace{-v}_{\in Ker(\hat{A})}) \in p + Ker(\hat{A})$

5.3 Zeilenumformungen und Elementarmatrizen

Zeilenumformungen sind:

- Vertauschungen von zwei Zeilen
- Addition des λ-fachen einer Zeiler zu einer anderen
- Multiplikation einer Zeile und $\lambda \in K/\{0\}$

Zeilenumformungen einer Matrix A sind beschreibbar als Multiplikationen von links mit so genannten Elementarmatrizen aus $K^{m \times m}$

z.B. Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile mit $j \neq i$ ($A \in K^{3\times 3}$, $i = 1$, $j = 2$):

$$\begin{pmatrix} 1\,\lambda\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \leftarrow z_1 \rightarrow \\ \leftarrow z_2 \rightarrow \\ \leftarrow z_3 \rightarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \leftarrow & \lambda \cdot z_2 + z_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & z_2 & \rightarrow \\ \leftarrow & z_3 & \rightarrow \end{pmatrix}$$

Analog: Spaltenumformungen sind Multiplikationen von rechts mit Elementen aus $K^{n\times n}$.

Elementarmatrizen sind Invertierbar.

Zeilen und Spaltenumformungen ändern nicht den Rang von A. Dimension von Zeilenraum/Spaltenraum bleibt gleich.

$det(a)$ wird durch Vorfaktor verändert. Wenn $det(A) = 0$, ist $det(A) = det(E \cdot A) = det(A \cdot E) = 0$

5.4 Satz

Die Elementarmatrizen erzeugen $GL(n, K)$, d.h. jede Matrix $A \in GL(n, K)$ lässt sich als Produkt von Elementarmatrizen $A = E_1 \cdots E_k$ schreiben. (nicht eindeutig!)

Beweisskizze:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Durch Zeilenvertauschung $a_{11} \neq 0$. Durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten Zeile zu den anderen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a^*_{22} & \cdots & a^*_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^*_{m2} & \cdots & a^*_{mn} \end{pmatrix}$$

Wiederholung dieses Verfahrens mit Untermatrix bis obere Dreiecksmatrix erreicht ist, also: $E_k \cdots E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} \hat{a_{11}} & \cdots & \hat{a_{1n}} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \hat{a_{nn}} \end{pmatrix}$, $\hat{a_{ii}} \neq 0,\ i = 1, ..., n$ (da A invertierbar.)

Durch weitere Zeilenumformungen: Diagonalgestalt: $E_l \cdots E_k \cdots E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} \hat{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \hat{a_{nn}} \end{pmatrix}$,

schließlich Multiplikation der i-ten Zeile mit $(\hat{a_{ii}})^{-1}: \ E_m \cdots E_l \cdots E_k \cdots E_1 \cdots A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Also $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} \cdots E_l^{-1} \cdots E_m^{-1}$ (Produkte von Elementarmatrizen).

Folgerung:

Praktisches Verfahren zur Matrixinversion ($A \in K^{n\times n}$ gegeben):

* Schreibe A auf, daneben Einheitsmatrix I_n: $A|I_n$
* Wene Zeilenumformungen auf A an, bis aus A Einheitsmatrix enstanden ist. Diese aber auch gleichzeitig auf die rechts daneben stehende Einheitsmatrix anwenden!
* Am Ende: rechts A^{-1}: $I_n|A^{-1}$

Begründung: $E_l \cdots E_k \cdots E_1 \cdots I_n = A^{-1}$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}:$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \; A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Für allgemeine Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme, Beschränkung auf Fall $Ax = b$ mit $A \in K^{n\times n},\; b \in K^n, Ainvertierbar$

5.5 Gaußsches Eliminationsverfahren

- Bilde geränderte Koeffizientenmatrix $(A, b) \in K^{n\times(n+1)}$
- Führe wie in 5.4 Zeilenumformungen durch bis aus A die Einheitsmatrix geworden ist (auch auf b anwenden!)
- Ergebnis: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 0 & \hat{b_1} \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \hat{b_n} \end{array}\right)$, eindeutige Lösung ist $x_1 = \hat{b_1},\; x_2 = \hat{b_2},\; \ldots$

Begründung:

$$\begin{aligned} Ax = b &\Leftrightarrow E_1 \cdot Ax = E_1 \cdot b \\ \vdots \quad &\Leftrightarrow \quad \vdots \\ &\Leftrightarrow E_l \cdots E_1 \cdot Ax = \underbrace{E_l \cdots E_1 \cdot b}_{\hat{b}} \Leftrightarrow x = \hat{b} \end{aligned}$$

5.6 Bemerkung: Variante

Nach Erreichen oberer Dreiecksgestalt: $\begin{pmatrix} \hat{a_{11}} & \cdots & \hat{a_{1n}} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \hat{a_{nn}} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b_1} \\ \vdots \\ \hat{b_n} \end{pmatrix} \Rightarrow x_n =$

$\frac{\hat{b}_n}{\hat{a_n}} \Rightarrow x_{n-1} = \frac{(\hat{b_{n-1}} - \hat{a_{n-1}}) \cdots x_n}{a_{n-1n-1}} \Rightarrow x_i = \frac{\hat{b_i} \cdots \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{\hat{a_{ii}}}$

... Rückwärtseinsetzen (Mehr in num. Mathematik)

Beispiel:

$\left| \begin{array}{llll} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 1 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \\ -x_1 & +5x_2 & -x_3 & = -1 \end{array} \right| \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{44}{7} & \frac{9}{7} \end{array} \right) \Rightarrow$

$x_3 = \frac{9}{44}$

$7x_2 = -3 + \frac{90}{44} \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{22}$

$x_1 - 2 \cdot -\frac{3}{22} + 3 \cdots \frac{9}{44} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{44}$

6 Determinanten

Sei K Körper, Permutationsgruppe $\sum_n := \{\varphi : \{1, ..., n\} \hookleftarrow, \ \varphi \ bijektiv\}$

Bemerkung: Jedes $\sum_n \ni \sigma$ lässt sich schreiben als $\sigma = \tau_K \circ \ldots \circ \tau_1$ mit Transpositionen τ_i (Bewegungsübergänge)

6.1 Definition/Bemerkung

Für $\sigma \in \sum_n$ sei $sign(\sigma) := \prod\limits_{\substack{a < j \\ i, j \in \{1, ..., n\}}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

$sign \sum_n \to \{-1, 1\}$ Gruppenhomomorphismus,

d.h. $\forall \pi, \sigma \in \sum_n :\ sign(\pi \circ \sigma) = sign(\pi) \circ sign(\sigma)$.

$sign(\sigma) : (-1)^{\text{Anzahl der Kreuzungen}}$

6.2 Definition/Satz: Determinante und Leibniz-Formel

a) Es existiert genau eine Abb. $det : \underbrace{K^{n \times n}}_{\text{id. mit } (K^n)^n} \to K$

mit folgenden Eigenschaften:

1) det ist linear in jeder Spalte, d.h. für $i \in \{1, ..., n\},\ a_1, ..., a_n, a_i' \in K^n,\ \lambda \in K$ ist $det(a_1, ..., a_i + \lambda a_i', a_{i+1}, ..., a_n) = det(a_1, ..., a_i, ..., a_n) + \lambda det(a_1, ..., a_i', ..., a_n)$ („multilinear“)

2) $det(a_1, ..., \underset{i}{a_i}, ..., \underset{j}{a_j}, ..., a_n) = -det(a_1, ..., \underset{i}{a_j}, ..., \underset{j}{a_i}, ..., a_n)$

3) $det(e_1, ..., e_n) = 1$ (wobei e_i i-ter Einheitsvektor in K^n)

b) det ist gegeben durch $det((a_{ij})_{i,j=1,...,n}) = \sum\limits_{\sigma \in \sum_n} sign(\sigma) \cdot a_{\sigma(0)0} \cdot a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$

(Leibniz-Formel)

Veranschaulichung:

$a_{11}\ a_{12}\ a_{13}$

$a_{21}\ a_{22}\ a_{23}$

$a_{31}\ a_{32}\ a_{33}$

Jedes σ entspricht einem Weg von links nach rechts durch die Matrix, der aus jeder Spalte und auch aus jeder Zeile genau ein Element aufsucht.

Beweis:

Sei $det : K^{n\times n} \to K$ fu. mit 1) und 3).

1. Behauptung: Für $\sigma \in \sum_n$ ist $det(e_\sigma(0), ..., e_\sigma(n)) = sign(\sigma)$

Beweis:

$\sigma = \tau_k \circ \cdots \circ \tau_1$ (Darstellung mit Transpositionen).

Setze $\sigma(j) := \tau_j \circ \cdots \circ \tau_1,\ j = 1, ..., k.$

Dann $det(e_\sigma(0), ..., e_\sigma(n)) = -det(e_\sigma(0)(k-1), ..., e_\sigma(n)(k-1))$

$= \underbrace{...}_{\text{K Schritte}} = (-1)^k \underbrace{det(e_1, ..., e_n)}_{1} = (-1)^k \underbrace{sign(\tau_k)}_{-1} \circ \cdots \circ \underbrace{sign(\tau_1)}_{-1}$

$= sign(\tau_k \circ \cdots \circ \tau_1) = sign(\sigma)$

2. Behauptung:

Für $(a_{ij}) \in K^{n\times n}$ folgt

$det((a_{ij})) = det(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2} e_{i_2}, ..., \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n}) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} \cdot$

$det(e_{i_1}, ..., e_{i_n}) = 0$, wenn 2 der ij gleich sind.

$= \sum_{\substack{i_1, ..., i_n \\ \{i_1, ..., i_n\} = \{1, ..., n\}}} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} det(e_1, ..., e_n) = \sum_{\sigma \in \sum_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{i_\sigma(n)n} \frac{det(e_1, ..., e_n)}{sign(\sigma)},$

also gilt Leibniz-Formel.

3. Zu Zeigen: Ausdruck in a) erfüllt tatsächlich 1) - 3), Beweis nicht schwer.

6.3 Bemerkung

1) bis 3) sind vernünftige Forderungen, falls $det(a_1, ..., a_n)$ so etwas wie „das Volumen" das von $a_1, ..., a_n$ erzeugten Parallelotops sein soll $(= \{\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n | \lambda_i \in [0, 1],\ i = 1, ..., n\})$ (wenn $K = \mathbb{R}$)

Falls 1) und 3) gelten, dann ist 2) äquivalent mit 2') $det(a_1, ..., a_n) = 0 \Leftrightarrow a_1, ..., a_n$ linear abhängig. (Beweis Übung)

6.4 Folgerung

a) $det(a_1, ..., a_n) = 0 \Leftrightarrow a_1, ..., a_n$ linear abhängig in K^n

b) $det(A) = det(A^T)$, det auch in den Zeilen linear.

c) Für Dreiecksmatrizen (obere/untere) mit Diagonalelementen $a_{ii},\ i = 1, ..., n$ gilt: $det(A) = a_{11}, ..., a_{nn}$

Beweis:

a) Siehe 6.3

b) $det(A) = \sum_{\sigma\in\sum_n} sign(\sigma)\cdot a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma\in\sum_n} sign(\sigma^{-1})\cdot a_{1\sigma(1)^{-1}}\cdots a_{n\sigma(n)^{-1}} = \sum_{\sigma\in\sum_n} sign(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} = det(A^T)$. Damit Zeilenlinearität klar.

c) Nur $\sigma = id$ gibt Betrag in der Leibnizformel, nämlich $\underbrace{sign(id)}_{=1}\cdot a_{11}\cdots a_{nn}$.

6.5 Determinantenmultiplikationssatz

$\forall A, B \in K^{n\times n} : det(A\cdot B) = det(A)\cdot det(B)$

Beweis:

1. Richtig für $E\cdot A$, E Elementarmatrix (Beweis: Hinschauen: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, Zeilenlinearität von A)
2. Für $A, B \in GL(n, K)$ ex. Elementarmatrizen $E_1, ..., E_k, F_1, ..., F_l$ mit $A_n = E_1\cdots E_k,\ \ B = F_1\cdots F_l$.
   $det(A\cdot B) = det(E_1\cdots E_k\cdot F_1\cdots F_l) = det(E_1)\cdot det(E_2\cdots E_k\cdot F_1\cdot F_l)$
   $= ... = det(E_1)\cdots det(E_k)\cdot det(F_1)\cdots det(F_l) = det(E_1\cdots E_k)\cdot det(F_1\cdots F_l)$
   $= det(A)\cdot det(B)$

3) Falls $det(A) = 0$ oder $det(B) = 0$, so A nicht invertierbar oder B nicht invertierbar.
   Also $\hat{A}$ nicht injektiv oder $\hat{B}$ nicht injektiv, also $\hat{A}\circ\hat{B}$ nicht injektiv.
   $(DimBild(\hat{A}\circ\hat{B}) < n$, dann $\hat{A}\circ\hat{B}$ nicht surj. auch nicht inj.).
   Somit $A\cdot B$ auch nicht invertierbar: $det(A\cdot B) = 0$.

6.6 Spezialfälle von Determinanten

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

6.7 Definition/Bemerkung

Sei $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2,\ A = (a_{ij})\in K^{n\times n}$.

Die i-j-Streichungsmatrix $A^{,}_{ij}$ ist dann definiert durch

$$A^{,}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in K^{(n-1)\times(n-1)}.$$

Das algebraische Komplement (der Kofaktor) zum Matrix-Element (a_{ij}) ist $(-1)^{i+1}det(A^{,}_{ij})$.

Die zu A komplementäre Matrix ist definiert als $\tilde{A} = (\alpha_{ij})_{i,j=1,...,n},\ \alpha_{ij} = (-1)^{i+1} det(A^{'}_{ji})$.

Es gilt $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = det(A) \cdot I_n = \begin{pmatrix} det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & det(A) \end{pmatrix}$.

Beweis:

$(\tilde{A} \cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} a_{kj} = \sum_k (-1)^{i+k} \cdot det(A^{'}_{k}) a_{kj}$.

Es ist $det(A^{'}_{ki}) = (-1)^{k+1}\ det_k \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots 0 \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots 0 \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$(\tilde{A} \cdot A)_{ij} = \sum_k \underbrace{(-1)^{i+k} \cdot (-1)^{i+k}}_{1} \cdot det(\vec{a_1}, ..., \vec{e_k}, ..., \vec{a_n}) a_{kj} = (-1)^{k+1} det(\vec{a_1}, ..., \vec{e_k}, ..., \vec{a_n}) =$

$det(\vec{a_1}, ..., \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \vec{e_k}, ..., \vec{a_n}) = \begin{cases} det(A) & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$(A \cdot \tilde{A})$ analog

Falls A invbar, so offenbar $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \tilde{A}$.

6.8 Entwicklungssatz von Laplace

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ ist $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A'_{ij})$ (Entwicklungssatz nach der i-ten Zeile, $i \in \{1, ..., n\}$ beliebig)

$A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ ist $det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A'_{ij})$ (Entwicklungssatz nach der j-ten Spalte, $j \in \{1, ..., n\}$ beliebig)

Beweis:

$det(A) = (A \cdot \tilde{A})_{ii} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{A_{ij}}_{a_{ij}} \cdot \underbrace{\tilde{A}_{ji}}_{det(A'_{ij}) \cdot (-1)^{i+j}} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A'_{ij})$

($(-1)^{i+j}$: Vorzeichen nach „Schachbrettregel“)

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} \left|\begin{matrix}1\\4\\0\end{matrix}\right| & \begin{matrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \end{pmatrix},\ det(A) = (+1) \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}_{0} - 4 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{5} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -20$

6.9 Cramersche Regel

Für $A \in GL(n, K),\ A = (\vec{a_1}, ..., \vec{a_n})$ und $b \in K^n$ ist die eindeutige Lösung des lin. Gl. Systems $Ax = b$ gegeben durch $x_i = \frac{det(a_1, ..., \overbrace{b}^{i}, ..., a_n)}{det(A)}$

Beweis:

$x = A^{-1} \cdot b = \frac{1}{det(A)} \tilde{A} b$

$$x_i = \frac{1}{det(A)} \cdot \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\tilde{A}_{ij}}_{\substack{Kofaktor\\ zu\ a_{ji}}} \quad b_j = \frac{det(a_1,...,b,...,a_n)}{det(A)}$$

6.10 Bemerkung

1) Für $n \geq 3$ ist die Cramer-Regel eher ungeeignet zur Lösungsberechnung (Rechenaufwand, Rundungsfehler)
2) Praktische Berechnung von Determinanten:

   Addition von Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen ändert die Determinante nicht.

   z.B: Dreiecksgestalt erzeugen: $\begin{vmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

   Variante: möglichst viele Nullen erzeugen, dann Entwicklungssatz!

7 Summen und direkte Summen von Unterräumen

7.1 Definition

Sei W ein K-Vraum und seien $U, V \subset W$ Unterräume.

Man setzt: $U + V := \{w \in W | \exists u \in U, \exists v \in V : w = u + v\}$

U+V ist Unterraum von W (klar). („Summe von U und V“)

Die Summe heißt direkt, falls $U \cap V = \{0\}$. Notation $W = U \oplus V$

7.2 Satz

Für Unterräume U, V von W sind äquivalent:

1) $W = U \oplus V$
2) $\forall w \in W \exists_1 u \in U \exists_1 v \in V : w = u + v$

Beweis:

1)⇒ 2) Sei $W = U \oplus V$.

Dann existiert zu $w \in W$ jedenfalls $u \in U$ und $v \in V$ mit $w = u + v$.

Sei $\tilde{u} \in U,\ \tilde{v} \in V$ mit $w = \tilde{u}+\tilde{v}$. Dann $\tilde{u}+\tilde{v} = u+v$, also $\underbrace{\tilde{u} - u}_{\in U} = \underbrace{v - \tilde{v}}_{\in V}$.

Somit $(u - \tilde{u}) \in \underbrace{U \cap V}_{\{0\}},\ (v - \tilde{v}) \in \underbrace{U \cap V}_{\{0\}} \Rightarrow u = \tilde{u},\ v = \tilde{v}$

2)⇒1) Gelte 2). Dann existiert zu $w \in W$ $u \in U,\ v \in V$ mit $w = u + v$, also $W \subset (U + V)$. „$\subset$“ klein, also $W = U + V$.

Zu Zeigen: Summe $U + V$ ist direkt, also $U \cap V = \{0\}$.

Sei $w \in U \cap V$. $w = w[\in U] + 0[\in V] = 0[\in U] + w[\in V]$.

Wegen Eindeutigkeit: $w = 0$.

Bemerkung/Beipiel:

Falls $b_1, ..., b_n$ Basis von W (K-Vraum), so ist $W = K \cdot b_1 \oplus K \cdot b_2 \oplus ... \oplus \cdot b_n$ (hierbei $K \cdot b_j = \{\lambda \cdot b_j | \lambda \in K\}$).

z.B: $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dabei direkte Summen für mehr als zwei Unterräume entsprechend

7.3 Satz

Sei W endlichdimensionaler K-Vraum und $u, V \subset W$ Unterräume.

Dann ist $dim(U + V) = dim(u) + dim(V) - dim(U \cap V)$

Beweis:

Sei $d_1, ...d_n$ Basis von $U \cap V$.

Es ex. $u_1, ..., u_l \in$ U und $v_1, ..., v_m \in$ V, so dass

$(u_1, ..., u_l, d_1, ..., d_k)$ Basis von U

$(v_1, ..., v_m, v_1, ..., v_k)$ Basis von V

(jeweils weglassen, falls $U \cap V = \{0\}$ oder $U \cap V = U$ etc.)

Behauptung: $(u_1, ..., u_l, d_1, ..., d_k, v_1, ..., v_m)$ ist Basis von $U + V$.

Beweis:

1) Erzeugenden System: $span(...) \subset U + V$ klar.

„$\subset$“: Sei $w \in (U + V),\ w = u + v$.

Dann ex. $\lambda_1, ..., \lambda_l, \mu_1, ..., \mu_k$

mit $u = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_l u_l + \mu_1 d_1 + ... + \mu_k d_k$

und $\tilde{\lambda}_1, ..., \tilde{\lambda}_l, \tilde{\mu}_1, ..., \tilde{\mu}_k$

mit $v = \tilde{\lambda}_1 v_1 + ... + \tilde{\lambda}_l v_l + \tilde{\mu}_1 d_1 + ... + \tilde{\mu}_k d_k$

Somit $w = u + v$

$= \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_l u_l + (\mu_1 + \tilde{\mu}_1) d_1 + ... + (\mu_k + \tilde{\mu}_k) d_k + \tilde{\lambda}_1 v_1 + ... + \tilde{\lambda}_m v_m$
$\in span(...)$

2) lin. unabhängigkeit:

Sei $\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_l u_l + \mu_1 d_1 + ... + \mu_k d_k + \vartheta_1 v_1 + ... + \vartheta_m v_m = 0$

$(Farbe \wedge Farbe =: a \in U, \quad Farbe \wedge Farbe =: b \in V)$.

Also auch $a \in U \cap V,\ b \in U \cap V$.

Da $(d_1, ..., d_k)$ Basis von $U \cap V$ ex. $\tilde{\mu}_1, ..., \tilde{\mu}_k$ mit $a = \tilde{\mu}_1 d_1 + ... + \tilde{\mu}_k d_k$.

Da $(u_1, ..., u_l, d_1, ..., d_k)$ Basis von U folgt: $u_1 = ... = u_l = 0$.

Analog $\vartheta_1 = ... = \vartheta_m = 0$. Da $d_1, ..., d_k$ lin. unabh. folgt: $\mu_1 = ... = \mu_k = 0$

Behauptung gezeigt!

Folgt:

$dim(U + V) = l + k + m = dim(U) + m = dim(U) + m + k - k$

$= dim(U) + dim(V) - k = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V)$

8 Eigenwerte und Eigenvektoren

8.1 Definition

Sei V K-Vraum und f $\in End_K V$.

a) $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von f, falls $v \in V \setminus \{0\}$ ex. mit $f(v) = \lambda v$.

   v heißt dann ein Eigenvektor (EV) von f zum Eigenwert (EW) λ.

b) Sei $A \in K^{n \times n}$ heißt Eigenwert von A, falls $w \in K^n \setminus \{0\}$ ex. mit $Av = \lambda\ v$ (v heißt Eigenvektor von A zu EW λ)

8.2 Definition und Bemerkung

Für f $\in End_K V$ bzw. $A \in K^{n \times n}$ und einem EW λ von f (bzw. A)

sei $E_\lambda(f) := \{v \in V | f(v) = \lambda v\}$ bzw. $E_\lambda(A) := \{v \in K^n | Av = \lambda v\}$

(geometrischer Eigenraum zum EW λ)

$E_\lambda(f) \quad ((A))$ ist Unterraum von V bzw. $K^{n \times n}$. Es ist $E_\lambda(f) = Ker(\lambda \cdot id_V - f)$ bzw. $E_\lambda(A) = Ker(\lambda \cdot id_{K^n} - \hat{A}$.

Übliche Schreibweise „$\lambda - f$" bzw. „$\lambda - \hat{A}$"

Weiter sei $G_\lambda(f) := \bigcup j = 1^\infty Ker((\lambda \cdot id - f)^j) = \{v \in V | \exists j \in \mathbb{N} : (\lambda \cdot id - f)^j(v) = 0\}$ (entspr. $G_\lambda(A)$).

„Verallgemeinerter Eigenraum" bzw. „algebraischer Eigenraum" von f (A) zum EW λ.

Offenbar $E_\lambda \subset G_\lambda$.

8.3 Bemerkung

n Eigenvektoren $v_1, ..., v_n$ von f (A) zu paarweisen verschiedenen EW $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von f (A) sind stets linear unabhängig.

8.4 Definition und Bemerkung: Charakteristisches Polynom

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ und $dim_K V = n \in \mathbb{N}$ und $f \in End_K V$. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V und $A := M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f)$.

Die Funktion $K \ni \lambda \mapsto det(\lambda I_n - A) =: P_f(\lambda)$ auch $P_A(\lambda)$ heißt charackteristisches Polynom von f bzw. A und ist unabhängig von $\mathcal{B}$.

Es ist $P_A(\lambda) = \lambda^n - spur(A)\lambda^{n-1} + ... + (-1)^n det(A)$ mit $spur(A) := \sum\limits_{i=1}^n a_{ii}$, falls $A = (a_{ij})_{i,j=1,...,n}$

Beweis:

Sei $\mathcal{B}'$ weitere Basis, $A' := M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$

$$\underbrace{M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f)}_{A} = \underbrace{M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(id)}_{T^{-1}} \cdot \underbrace{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)}_{A'} \cdot \underbrace{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id)}_{T}$$

Es ex. $T \in Gl(n, K))$ mit $A = T^{-1} \cdot A' \cdot T$.

Für $\lambda \in K :\ det(\lambda I_n - A)$

$= det(\lambda I_n^- T^{-1} \cdot A' \cdot T) = det(T^{-1} \cdot \lambda I_n \cdot T - T^{-1} \cdot A' \cdot T)$

$= det(T^{-1} \cdot (\lambda I_n - A') \cdot T) = det(T^{-1}) \cdot det(\lambda I_n - A') \cdot det(T) = det(\lambda I_n - A')$

$\Rightarrow P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$

$$P_A(\lambda) = det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

$= \lambda^n - \lambda^{n-1}(a_{11} + ... + a_{nn}) + ... + P_A(0)$

$= \lambda^n - \lambda^{n-1} spur(A) + ... + (-1)^n det(A)$

Speziell für $A \in \mathbb{C}^{2\times 2} : P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda spur(A) + det(A)$

NS: $\frac{spur(A) \pm \sqrt{spur(A)^2 - 4det(A)}}{2}$

8.5 Bemerkung und Definition: Algebraische und geometr. Vielfachheit von EW

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, $dim_K V = n$, $f \in End_K(V)$.

a) Für $\lambda \in K$ gibt λ EW von f$\Leftrightarrow$ $P_f(\lambda) = 0$

b) Falls λ EW vn f, so sei

$\nu_{geom}(\lambda) := dim_K(E_\lambda)$ (geom. Vielfachheit),

$\nu_{alg}(\lambda)$:=Vielfachheit von λ als Nullstelle von P_f

(algebraische Vielfachheit).

Also: Es ex. eine Polynomfunktion q mit $q(\lambda) \neq 0$,

so dass $P_A(0) = (z - \lambda)^{\nu_{alg}(\lambda)} \cdot q(z)$ für $z \in \mathbb{C}$.

Es gilt stets: $\nu_{geom}(\lambda) \leq \nu_{alg}(\lambda)$

Beweis:

zu a): Sei A darstelende Matrix von f bzgl einer basis.

λ EW $\Leftrightarrow x \cdot id - f$ nicht injektiv $\Leftrightarrow \lambda \cdot I_n - A$ nicht invertierbar

$\Leftrightarrow \; det(\lambda \cdot I_n - A) = 0 = P_A(\lambda) = P_f(\lambda)$.

zu b) Sei $v_1, ..., v_k$ Basis von $E_\lambda(f)$, also $k = \nu_{geom}(\lambda)$. Es ex. $w_{k+1}, ..., w_n \in V$, so dass $(v_1, ..., v_k, w_k + 1, ..., w_n)$ Basis von V.

Dann darstellende Matrix $M_B^B(f) = A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & x \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & x \end{pmatrix}$ (k, n-k).

Also $P_f(z) = P_A(z) = det(zI_n - A) = \begin{pmatrix} z - \lambda & & 0 & x \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & z - \lambda & x \end{pmatrix} = z - \lambda^k \cdot$

$det \begin{pmatrix} z - * & & -* \\ & \ddots & \\ -* & & z - * \end{pmatrix}$, also $\nu_a lg(\lambda) \geq k = \nu_{geom}(\lambda)$

8.6 Definition und Satz: Diagonalisierbarkeit

Sei $dim_K V = n \in \mathbb{N}$.

a) $f \in End_K V$ heißt diagonalisierbar, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V aus Eigenvektoren von f gibt

(Dann $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit EW $\lambda_1, ..., \lambda_n$ zu den EV $b_1, ..., b_n$, die die Basis $\mathcal{B}$ bilden.

b) Sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$. Äquivalent zur Diagonalisierbarkeit von f ist: Es ex. $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$, so dass $p_f(z)$ (char. Polynom) $= (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n)$ (p_f zerfällt über K in Linearfaktoren) und für jeden EW $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von f gilt: $\nu_{geom}(\lambda_i) = \nu_{alg}(\lambda_i), i = 1, ..., n$

Beispiele:

1. $A = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,2\,0 \\ 0\,0\,3 \end{pmatrix}, D_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

   entspr. lin. Abb. $\hat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax oder \hat{A}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto Az$

2. $A = \begin{pmatrix} 2\,1 \\ 0\,2 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\hat{A}), P_A = (\lambda - 2)^2$

   2 EW: $\nu_{alg}(2) = 2$

   $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist EV zu EW=2. Es ex. kein von b_1 lin. unabh. EV b_2 zum EW 2, denn sonst wäre $Ab_1 = 2b_1$, $Ab_2 = 2b_2$.

   Somit für alle $x \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha b_1 + \beta b_2$ mit gewissen α, β,

   $Ax = A(\alpha b_1 + \beta b_2) = \alpha A b_1 + \beta A b_2 = 2(\alpha b_1 + \beta b_2) = 2x$, aber $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $\Rightarrow \nu_{geom}(2) = 1 < \nu_{alg}(2) = 2 \Rightarrow \hat{A}$ nicht diagonalisierbar!

Beweis von b):

Sei f diagbar. Dann $\sum\limits_{\substack{\lambda \\ \lambda\ EW\ v\ V}} dim E_\lambda = n \leq \sum\limits_{\substack{\lambda \\ \lambda\ EW\ v\ V}} \nu_{alg}(\lambda) \leq grad von p_f = n$.

Somit $\forall \lambda EW von f : \nu_{geom}(\lambda) = \nu_{alg}(\lambda)$

Bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ aus Eigenvektoren auf f gilt: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit den EW $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Somit $p_f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda_n \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

Umgekehrt: p_f zerfalle in Linearfaktoren und für jeden $EW \lambda_i$ gelte: $\nu_{geom}(\lambda_i) = \nu_{alg}(\lambda_i) (i = 1, ..., n)$.

Dann $n = \sum\limits_{\substack{\lambda \\ \lambda\ EW\ v\ V}} \nu_{alg}(\lambda) = \sum\limits_{\substack{\lambda \\ \lambda\ EW\ v\ V}} \nu_{geom}(\lambda) = \sum\limits_{\substack{\lambda \\ \lambda\ EW\ v\ V}} dim E_\lambda$.

$(v_1^{(\lambda)}, ..., v_{\nu_{alg}(\lambda)}^{(\lambda)})$, alle diese Vektoren bilden zusammen dann eine Basis von V (Beachte 8.3, woraus folgt, dass die Summe $v_1^{(\lambda)} E_\lambda$ direkt ist, also $dim(\sum\limits_{\substack{\lambda \\ \lambda\ EW\ v\ V}} E_\lambda) = \sum\limits_{\substack{\lambda \\ \lambda\ EW\ v\ V}} dim(E_\lambda) = n)$. Bezgl. dieser Basis $\mathcal{B}$ gilt dann, dass $M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f)$ diagonalisierbar.

8.7 Folgerung

a) Falls $f \in End_K V$ diagbar, so ist $V = \bigoplus\limits_{\substack{\lambda,\lambda \\ EW von f}} E_\lambda(f)$ (direkte Summe)

b) Falls f n verschiedene EW in K hat, so ist f diagbar.

8.8 Satz: jordansche Normalform

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, p_f zerfalle über K in Linearfaktoren.

Dann gilt:

1) Für alle EW λ von f ist $dim(G_\lambda(f)) = \nu_{alg}(\lambda))$ und $V = \bigoplus\limits_{\substack{\lambda,\lambda \\ EW von f}} G_\lambda(f)$ invariant unter $f : f(G_\lambda) \subset G_\lambda$

2) In jedem G_λ gibt es eine Basis bzgl der $f|_{G_\lambda} : G_\lambda \to G_\lambda$ die darst. Matrix
$$B_\lambda = \left.\begin{pmatrix} \lambda\, E_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & E_{\nu_{alg}(\lambda)-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right\rbrace \nu_{alg}(\lambda) \text{ mit } \varepsilon_i \in \{0,1\}, i = 1, ..., \nu_{alg}(\lambda) - 1 \text{ und}$$
$\#\{i|\varepsilon_i = 0\} = \nu_{geom}(\lambda) - 1$

3) Es ex. somit eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(f) = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & B_y & \\ & & B_\mu \\ 0 & * & \end{pmatrix}$

Beweis: siehe Fischer - Lineare Algebra. Vorsucht:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ hat komplexe EW $\lambda_1 = 1+2i$, $\lambda_2 = 1-2i$, also $\hat{A}_\mathbb{C} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ist diagbar bzgl. geeigneter Basis von $\mathbb{C}^2$: Darst. Matrix $\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}$.

Aber: $\hat{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nicht reell diagbar!

8.9 Bemerkung

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\hat{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ hat das char. Polynom p_A im Allgemeinen auch komplexe Nullstellen (in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$). Diese sind nicht EW von $\hat{A}$ (über Körper $\mathbb{R}$), aber von $\underbrace{\hat{A}_\mathbb{C} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}}_{Komplexifizierung}$, $z \mapsto A$. (Dann, falls λ EW von $\hat{A}_\mathbb{C}$ mit EV v, so $\overline{\lambda}$ auch EW von $\hat{A}_\mathbb{C} mit EV \overline{v}$)

Beweis:

$Az = \lambda z \Rightarrow \overline{Az} = \overline{\lambda z} = \overline{A} \cdot \overline{z} = A \cdot \overline{z} = \overline{\lambda} \cdot \overline{z}$ mit A reell.

Über $\mathbb{C}$ zerfällt das Polynom p_A in Linearfaktoren, Satz über JNF anwenden, liefert Zerlegung $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\substack{\lambda,\lambda \\ EW\ v\ \hat{A}_{\mathbb{C}}}} G_\lambda, dim(G_\lambda) = \nu_{alg}(\lambda)$, invariant unter $\hat{A}_{\mathbb{C}}$.

Man erhält wiefolgt unter $\hat{A}$ invariante Zerlegung von $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\substack{\lambda,\lambda \\ EW von \hat{A}_{\mathbb{C}}}} \overbrace{\Re(\underbrace{G_\lambda + G_{\overline{\lambda}}}_{:=u_\lambda})}^{v_\lambda}, u_\lambda = G_\lambda \text{ falls } \lambda \in \mathbb{R}, u_\lambda = G_\lambda \oplus G_{\overline{\lambda}}, \text{ falls } u \notin \mathbb{R},$$

$$dim(v_\lambda) = \begin{cases} \nu_{alg}(\lambda) & \lambda \in \mathbb{R} \\ 2\nu_{alg}(\lambda) & \lambda \notin \mathbb{R}, ln(\lambda) > 0 \end{cases}$$

9 Euklidische unitäre Vektorräume

Hier stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

9.1 Definition

Eine Bilinearform $< .,. >: V \times V \to \mathbb{R}$ auf den K-Vraum V ist eine abb. mit den Eigenschaften

$< x + y, z >=< x, z > + < y, z >, < x, y + z >=< x, y > + < x, z >,$

$< \lambda x, z >= \lambda < x, z >, < x, \lambda z >= \lambda < x, z >.$

Also $\forall u \in V :< u, . >: V \to \mathbb{K}$ linear, $< ., u >: V \to \mathbb{K}$ linear.

$< ., . >$ heißt symmetrisch, falls $< u, v >=< v, u >$ $(\forall u, v \in V)$.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ heißt $< ., . >$ hermitische Form (hermitisch), falls

$< u, \lambda v + w >= \lambda < u, v > + < u, w >$

$< \lambda u + v, w >= \overline{\lambda} < u, w > + < v, w >$

$< u, v >= \overline{< v, u >}$

$(\forall u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{K})$

Eine sym. Bilinearform bzw. eine Hermitische Form heißt positif definiert $\Leftrightarrow \forall u \in V \setminus \{0\} :< u, u >\to 0$

Ein Skalarprodukt auf $V(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ (unitäres Produkt auf $V(\mathbb{K} = \mathbb{C})$) ist eine pos. def. symmetr. (hermet.) Bilinearform auf V. Dann $(V, <, >)$ eukl. oder unitärer Vraum

Beispiel:

1. $V = \mathbb{R}^n, < v, w >= \sum_{j=1}^{n} v_j w_j$ (Euklidisches Skalarprodukt)
2. $V = \mathbb{C}^n, < v, w >= \sum_{j=1}^{n} \overline{v}_j w_j$ (Standard-Skalar auf $\mathbb{C}$)
3. $V = C^0([0, 1], \mathbb{C}), < f, g >= \int_0^1 f(x)g(x)dx$

9.2 Definition

Eine Norm auf dem $\mathbb{K}$-Vr V ist eine abb. $|| \; || : V \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto ||x||$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

2) $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$

3) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (Dreiecksungl.)

9.3 Bemerkung

Falls $(V, <, >)$ eukl. oder unitärer Vraum, so wird durch $||x|| := \sqrt{< x, x >}$ eine Norm auf V definiert

Beweis:

$||v + w||^2 =< v + w, v + w >= ||v||^2 + 2\Re(< v, w >) + ||w||^2 \leq ||v||^2 + 2| < v, w > | + ||w||^2 \leq ||v||^2 + 2||v|| \cdot ||w|| + ||w||^2 = (||v|| + ||w||)^2$,

also $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Ab hier: (V,¡,¿) stets euklid. oder unitär.

9.4 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Sei $(V, <, >)$ euklid. oder unitär. Dann (mit $||x|| := \sqrt{< x, x >}$): $\forall v, w \in V : | < v, w > | \leq ||v|| \cdot ||w||$ (Gleichheit genau dann, wenn v,w lin. abhängig)

Beweis:

Falls $w = 0$, sei jetzt $w \neq 0$. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $0 \leq< v + \lambda w, v + \lambda w >= ||v||^2 + < w, v > + < v, \lambda w > + < \lambda w, \lambda w >= ||v||^2 + \overline{\lambda} < v, w > + \lambda < v, w > + < \lambda w, \lambda w >= ||v^2|| + 2\Re(\lambda < v, w >) + |\lambda|^2 \cdot ||w||^2$

Speziell gilt dies für $\lambda = -\frac{\overline{<v,w>}}{||w||^2}, also 0 \leq ||v||^2 - \frac{2|vv,w>|^2}{||w||^2} + \frac{|<v,w>|^2}{||w||^4}||w||^2 \Rightarrow$
$0 \leq ||v||^2||w||^2 - | < v, w > |^2 \Rightarrow | < v, w > |^2 \leq ||v||^2||w||^2$

9.5 Definition und Satz: Orthogonalität

a) $u, v \in V$ heißen orthogonal $(u \perp v) \Leftrightarrow< uv >= 0$.

Für $M \subset V$ heißt $u \perp M : \forall v \in M :< u, v >= 0$

b) Eine Summe $u_1 + u_2$ von Unterräumen von V heißt orthogonal, falls $\forall u_1 \in U_1 \forall u_2 \in U_2 : u_1 \perp u_2$ In Zeichen: $u_1 \oplus u_2$ (orth. Summen sind stets direkt)

c) Für einen Unterraum $U \subset V$ sei $U^\perp : \{v \in V | v \perp U\}$ (orth. Komplement), $U^\perp$ ist auch Unterraum v. V.

9.6 Satz

Seien $x, y \in V$.

a) $x \perp y \Rightarrow ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ (Pythagoras)

b) $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ (Parallelogram-Gleichung)

Beweis:

a) $||x + y||^2 =< x + y, x + y >= ||x||^2 + ||y||^2 + \underbrace{< x, y > + < y, x >}_{=0} =$
$||x||^2 + ||y||^2$

b) $||x+y||^2+||x-y||^2 =< x+y, x+y > + < x-y, x-y >= ||x||^2+||y||^2+ < x, y > + < y, x > +||x||^2+||y||^2 - < x, y > - < y, x >= 2(||x||^2+||y||^2)$

9.7 Definition

Eine Familie $(V_j)_{j \in J}$ von Vektoren aus V heißt Orthonormalsystem (ONS), falls $\forall j, k \in J :< v_j, v_k >= \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$

Ein ONS heißt Orthonormalbasis, falls es eine Basis von V ist (ONB)

9.8 Bemerkung

Sei $U \subset V$ Unterraum, $u_1, ..., u_k$ ONB von U und $v \in V$.

Dann gilt: $v - \underbrace{\sum_{j=1}^{k} < u_j - v > u_j}_{orth.Proj.v.f_U} \in U^\perp$

Beweis

Für $l \in \{1, ..., k\}$ ist $< v - \sum_{j=1}^{k} < u_j, v > u_j, u_l > = < v, u_l > - \sum_{j=1}^{k} << u_j, v > u_j, u_l > = < v, u_l > - \overline{< u_l, v >} = < v, u_l > - < v, u_l > = 0$

9.9 Folgerung

1) Falls $U = V$ $(k = dim(U) = dim(V))$, so gilt: $\forall v \in V : v = \sum_{j=1}^{k} < u_j, v > u_j$

(Koeffizient von v bzgl. ONB $(u_1, ..., u_k)$ durch $< u_j, v >$ gegeben)

2) $V = U \oplus U^\perp$ und für $v \in V$ ist die orth. Projektion von v auf U gegeben auf $\sum_{j=1}^{k} < u_j, v > u_j$ (wobei $u_1, ..., u_k$ ONB von U)

Beweis

1) Klar.

2) $V = \underbrace{V - \sum_{j=1}^{k} < u_j, v > u_j}_{\in U^\perp} + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} < u_j, v > u_j}_{\in U}$, also $V = U \odot U^\perp$

(Orthogonalität hier klar!)

9.10 Satz

Sei $(V, <,>)$ eukl. oder unitärer Vr. $(v_1, ..., v_n)$ Basis von V. Dann wird durch $u_1 := \frac{v_1}{||v_1||}, \tilde{u}_{k+1} := v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} < u_j, v_{k+1} > u_j, u_{k+1} := \frac{\tilde{u}_{k+1}}{||\tilde{u}_{k+1}||}$ (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)

eine ONB $u_1, ..., u_n$ definiert.

Beweisidee:

Nach 9.8: $\tilde{u}_{k+1} \perp span(u_1, ..., u_k)$. Beachte: Für $k \in \{1, ..., n\}$ ist $span(u_1, ..., u_k) = span(v_1, ..., v_k)$

10 Adjungierte lineare Abb.

Sei $(V, <,>)$ eukl./unitär.

10.1 Definition und Bemerkung

Sei $f : V \to V$ linear. Es ex. genau eine lineare abb. $f^{ad} : V \to V$ linear, sodass $\forall w, v \in V : < v, f(w) > = < f^{ad}(v), w >$

f heißt selbstadjugiert (im Komplexen Fall hermitisch) falls $f = f^{ad}$.

Beispiel:

$V = \mathbb{C}^n$, Standard-Skalarprodukt $< v, w >= \sum\limits_{j=1}^{k} \overline{v}_j w_j$.

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $f = \hat{A}$, $f(z) = Az$

$\forall v, w \in \mathbb{C}^n :< v, f(w) >=< v, Aw >= \overline{< Aw, v >} = \overline{(Aw)^T \cdot v} = \overline{(\overline{A} \cdot \overline{w})^T v} =$
$\overline{\overline{w}^T \overline{A}^T v} = w^T A^T \overline{v} = (\overline{A}^T v)^T w =< \overline{A}^T v, w >$.

Also $\hat{A}^{ad} = \hat{\overline{A}^T}$

10.2 Definition: spezielle Matrizen

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt hermitisch $\Leftrightarrow A = \overline{A}^T$ (im reellen Fall symmetrisch)

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt unitär (für $\mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal) $\Rightarrow \overline{A}^T \cdot A = I_n$ (Einheitsmatrix)

$(A \in U(n), A^T \cdot A = I_n, A \in O(n))$

$SU(n) := \{A \in U(n) | det(A) = 1\}$, $SO(n) := \{A \in O(n) | det(A) = 1\}$

Es gilt: $A \in U(n) \Leftrightarrow$ Spalten von A sind ONB von $\mathbb{C}^{n\times n}(\mathbb{R}^{n\times n}) \Leftrightarrow$ Zeilen von A sind ONB von $\mathbb{C}^{n\times n}(\mathbb{R}^{n\times n})$

11 Hauptachsentransformation

$(V, <, >)$ euklid. (unitär), $dim(V) < \infty$

11.1 Satz

Sei $f : V \to V$ linear, hermitisch (selbstadjug.). Dann:

a) Alle EW von f sind rell.

b) Es ex. eine ONB aus EV von f

Beweisidee:

Induktion über $n = dim(V)$:

1) F hat einen rellen EW. Sei $v \in \mathbb{C}^n$ zugehöriger EV. $U := (\mathbb{C} \cdot v)\perp$

2) Es gilt dann: $f(n) \subset U$ (!) (benutzt: $f = f^{ad}$). Nach dieser Annahme: $\exists$ ONB $u_1, ..., u_{n-1}$ (aus EV von f) von U. setze $u_n := \frac{v}{||v||}$

11.2 Folgerung

Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitisch ($A = \overline{A}^T$) gilt: A ist diagonalisierbar;

Es ex. ONB aus EV von A und es ex. $O \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär (orthogonal im rellen Fall)

mit $O^T \cdot A \cdot O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$(\overline{O}^T = O^{-1})$ wobei $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ die EW von A sind.

11.3 Satz

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal. Dann ex. ONB $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$, so dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\hat{A})$ die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & A_n \end{pmatrix}$$

wobei A_j die Form $\begin{pmatrix} cos(\alpha_j) & -sin(\alpha_j) \\ sin(\alpha_j) & cos(\alpha_j) \end{pmatrix}$ hat mit gewissen $\alpha_j \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$

Beweisidee: Induktion über dim(V)