Mathematik für Physiker

Analysis I

Skript zur Vorlesung von Prof. Dr. Lani-Wayda

Mitgeschrieben und getext von Julian Bergmann

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen & Aussagen

Def:

Zusammenfassung von Objekten zu Mengen:

$M = \{1, 2, 3\}$

$S = \{x|x \text{ ist nat. Zahl}, x > 5\} = \{y \in \mathbb{N}|y > 5\}$

Objekte einer Menge sind dessen Elemente.

Beispiele: $2 \in M$, $7 \in S$, $5 \notin S$

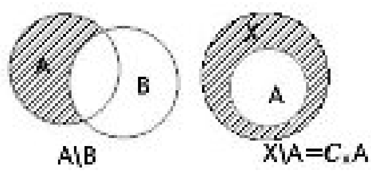
Technisches Hilfmittel: Leere Menge $\emptyset$

1.1 Mengenbeziehungen/-operationen

$A \subseteq B$	**Inklusion;** *A ist Teilmenge von B, B Obermenge von A.* *Jedes Element von A ist auch Element von B. Auch $A \subset B$*
$A \subset B$	**Strikte Inklusion;** *A ist Teilmenge von B aber $A \neq B$. Auch $A \underset{\neq}{\subset} B$*
$A \cap B$	**Durchschnitt, gelesen A Durchschnitt B;** $= \{x \| x \in A \text{ und } x \in B\}$
$A \cup B$	**Vereinigung, gelesen A vereinigt B;** $= \{x \| x \in A \text{ oder } x \in B\}$
$A \setminus B$	**Differenz, gelesen A minus/ohne B;** $= \{x \| x \in A \text{ und } x \in B\}$
$\complement A$ oder A^C	**Komlement, gelesen Komplement von A;** *Normalerweise auf eine Obermenge X bezogen $\complement_X A = X \setminus A$*
$A \cap B = \emptyset$	*A und B haben kein gemeinsames Element*

Bei einer Potenzmenge $P(A) = \{B|B \subset A\}$ gilt stets:

$\emptyset \subset A$, also $\emptyset \in P(A)$ und $A \in P(A)$



1.2 Mathematische Aussagen

Def:

Aussagen, denen sich „vernünftig" ein Wahrheitswert „w" oder „f" zuordnen lässt (auch, wenn dieser nicht bekannt ist).

Beispiele: „10 ist Primzahl", „$3 > 1$"

Aussagenoperation: Negation $\neg$; Verknüpfung „Und" $\wedge$, „Oder" $\vee$

Wahrheitstabellen: Seien a, b Aussagen.

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$\neg a \vee b$	$a \Leftrightarrow b$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w	f
f	f	w	w	f	f	w	w

Implikation: $a \Rightarrow b$ definiert als $\neg a \vee b$	Äquivalenz: $a \Leftrightarrow b$ definiert als $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$

1.3 Rechenregeln

Definition:

Schlussregeln sind Aussagen, die stets den Wert „w“ haben

Seien a, b, c Aussagen; A, B, C, X Mengen; $(A \cup B \cup C) \subset X$.

1. Assoziativität	$(a \vee b) \vee c \Leftrightarrow a \vee (b \vee c)$ $(a \wedge b) \wedge c \Leftrightarrow a \wedge (b \wedge c)$	$(A \cup B) \cup C \Leftrightarrow A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C \Leftrightarrow A \cap (B \cap C)$
2. Distributivität	$a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ $a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$	$A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. de Morgan-sche Komplementierungsregel	$\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$ $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow \neg a \vee \neg b$	$X \setminus (A \vee B) \Leftrightarrow (X \setminus A) \wedge (X \setminus B)$ $X \setminus (A \vee B) \Leftrightarrow (X \setminus A) \wedge (X \setminus B)$ $(A \cup B)^{\complement} \Leftrightarrow A^{\complement} \cap B^{\complement}$ $(A \cap B)^{\complement} \Leftrightarrow A^{\complement} \cup B^{\complement}$
4. Kontraposition	$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$	Falls $A \subseteq B$, so $(X \setminus B) \subseteq (X \setminus A))$ bzw. $B^{\complement} \subseteq A^{\complement}$

Exemplarischer Beweis für 4.:

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \Rightarrow b$	$\neg b \Rightarrow \neg a$
F	F	W	W	W	W
F	W	W	F	W	W
W	F	F	W	F	F
W	W	F	F	W	W

Schreibabkürzungen:

Für Alle: $\forall$

Es existiert: $\exists$

Es existiert genau ein $\exists_1$

Bsp.:

1. Falls $M \subseteq N$, so ist die Aussage $\forall x \in M : x \in N$ wahr.
2. Die Aussage $\forall x \in \{1, 2, 3\} \exists y \in \{1, 2, 3\} : y > x$ ist falsch.

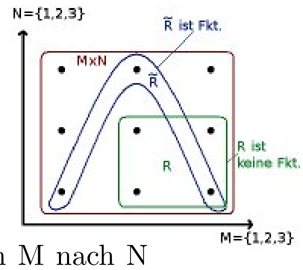
Hinweis:

Manchmal auch „Nachstellung“ des Gültigkeitsbereiches:

Beispiel: $x^2 \leq \frac{1}{4}(|x| \leq \frac{1}{2})$

2 Relation & Funktionen

2.1 Definition



1. Für Objekte a,b ist das geordnete Paar (a,b) definiert durch:

   $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$
2. Für Mengen M, N ist das Produkt definiert durch:

   $M \times N := \{(a, b) | a \in M, b \in N\}$
3. Eine Relation zwischen M und N ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$.

   Statt „$(a, b) \in R$“ schreibt man „aRb“. Beispiele: $a \leq b$, $a > b$, etc.
4. Eine Relation zwischen M und N heißt Funktion (Abbildung) von M nach N falls gilt:

   $\forall x \in M \exists_1 y \in N : (x, y) \in R$ oder xRy.

   Schreibweise:

   $$f : \begin{array}{c} M \to N \\ x \mapsto f(x) \end{array},$$

   Beispiel: $f : \begin{array}{c} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ oder $f(x) = x^2$

2.2 Bemerkung: Funktion

Zur Beschreibung einer Funktion sind 3 Dinge nötig:

1. Definitionsbereich
2. Wertebereich
3. Zuordnungsvorschrift

z.B. sind die Funktionen

$f : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{N}$, $g : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N}$ und $h : \{1, 2, 3\} \to \{2, 3, 4\}$

mit $f(x) = x + 1$, $g(x) = x + 1$ und $h(x) = x + 1$ alle verschieden.

2.3 Definition: Bild

Seien A, B Mengen, $f : A \to B$ Funktion

1. Sei $A' \subseteq A$. Das *Bild* von A' unter f ist

   $f(A') = \{y | \exists x \in A', y = f(x)\} = \{f(x) | x \in A'\}$
2. Sei $A' \subseteq A \subseteq A''$ und B' Menge.

   Die *Einschränkung* von f auf A' ist die Funktion $f|_{A'} : A' \to B$

   Eine Funktion $g : A'' \to B'$ heißt *Fortsetzung* von f, falls gilt:

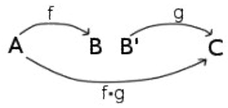
   $\forall x \in A : g(x) = f(x)$
3. Für eine beliebige Menge C ist das *Urbild* von C definiert durch

   $f^{-1}(C) := \{x \in A | f(x) \in C\}$

2.4 Definition: Komposition

Seien $f : A \to B$, $g : B' \to C$ Funktionen und $B \subseteq B'$. Dann ist die *Komposition* (Hintereinanderausführung) $g \circ f$ definiert durch:

$g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



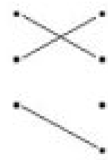
2.5 Definition: Bijektiv

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt:

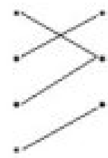
injektiv , falls gilt: $\forall x, y \in A : \{f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\}$.

surjektiv , falls gilt: $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$ (Gleichbedeutend: f(A)=B).

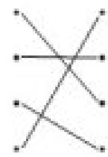
bijektiv , falls f surjektiv und injektiv.



injektiv



surjektiv



bijektiv

Beispiele:

$$f : \{1,2\} \to \{1,2,3\} \text{ ist injektiv, nicht surjektv.}$$
$$x \mapsto x + 1$$

$$g : \{1,2\} \to \{2,3\} \text{ ist bijektv.}$$
$$x \mapsto x + 1$$

Falls $f : A \to B$ bijektiv, so existiert die *inverse Funktion (Umkehrfunktion)*

$f^{-1} : B \to A$, die jedem $y \in B$ das eindeutige $x \in A$ mit $f(x) = y$ zuordnet.

Es gilt:

$$f(f^{-1}(y)) = y (y \in B)$$
$$f^{-1}(f(x)) = x (x \in A)$$

2.6 Definition: Relation

Sei R Relation in der Menge M (also $R \subseteq M \times M$).

a) R heißt *Äquivalenzrelation* (auf M), falls folgende Eigenschaften für alle $x, y, z \in M$ erfüllt sind:
   1) xRx (*Reflexivität*)
   2) $xRy \Rightarrow yRx$ (*Symmetrik*)
   3) xRy und $yRz \Rightarrow xRz$ (*Transitivität*)

   Häufig benutze Symbole: „=“, „≈“, „∼“

   Für $x \in M$ ist die Äquivalenzmasse von x (bzgl. R) definiert als

   $\{y \in R | yRx\}$

b) R heißt *Ordnung* auf M (M durch R geordnet), falls für alle $x, y, z \in M$ folgende Eigenschaften gelten:
   1) xRx (Reflexivität)
   2) $(xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow x = y$ (*Antisymmetrik*)
   3) xRy und $yRz \Rightarrow xRz$ (Transitivität)

   Häufig benutze Symbole: „≤“, „≺“, „⊆“

c) Eine Ordnung $\prec$ auf M heißt *Totalordnung*, falls gilt:

   $\forall x, y \in M : ((x \prec y) \vee (y \prec x))$

Beispiele:

„=“ bei Zahlen (*Äquivalenzreation*),

„$\leq$“ bei Zahlen (*Ordnungsrelation*),

„$\subset$“ bei Mengen (*Ordnungsrelation*).

2.7 Bemerkung: Partition

Sei $\sim$ eine *Äquivalenzrelation* auf der Menge M.

Dann bilden die *Äquivalenzklassen* bezüglich $\sim$ eine *Partition*, d.h. Zerlegung von M in paarweise disjunkte Teilmengen.

D.h. $A \cap B = \emptyset$ für verschiedene Äquivalenzklassen A, B.

2.8 Definition/Bemerkung: sup/inf & min/max

Sei $\leq$ eine Ordnung auf der Menge M (M durch $\leq$ geordnet). Sei $A \subseteq M$.

1) A heißt nach oben (unten) beschränkt, falls ein $s \in M$ existiert mit $\forall a \in A : a \leq s$ $(a \geq s)$.

   s heißt dann *obere (untere) Schranke* für A.

2) $s \in M$ heißt *Supremum* von A, falls s eine *kleinste obere Schranke* für A ist, d.h.:

   1) s ist obere Schranke
   2) falls S obere Schranke für A, dann $s \leq S$

   Analog heißt s *Infimum* von A, falls s eine *größte untere Schranke* für A ist, d.h.:

   1) s ist untere Schranke
   2) falls S untere Schranke für A, dann $s \geq S$

   Falls Supremum/Infimum von A existiert, so ist dies eindeutig.

   Man schreibt dann $s = sup(A)$ bzw. $s = inf(A)$

3) $a \in A$ heißt maximales (minimales) Element von A, falls gilt:

   $\forall x \in A : x \leq a$ $(x \geq a)$

   Notation: $a = max(A)$; $a = min(A)$

Bemerkung: Im Allgemeinen existiert weder sup/inf, noch min/max.

Beweis der Eindeutigkeit von sup/inf:

Seien s, s' Suprema von A.

Da $s' \circ s$ für A, gilt nach 2): $s \leq s'$, ebenso $s' \leq s$

Mit Antisymmetrie von „$\leq$“: $s = s'$

Analog für inf.

2.9 Zornsches Lemma

Sei M eine Menge und $\leq$ Ordnung auf M derart, dass gilt:

jede totalgeordnete Teilmenge $N \subset M$ hat eine obere Schranke in M.

Dann gilt: Die ganze Menge M hat ein maximales Element.

2.10 Auswahlaxiom

Sei I eine beliebige Menge (Indexmenge) und für jedes $i \in I$ sei eine Menge $A_i \neq \emptyset$ gegeben.

Dann existiert eine Funktion $F : \left(I \rightarrow \overset{\bigcup}{i \in I} \right) A_i$ mit der Eigenschaft $\forall i \in I : f(i) \in A_i$ (Selektion eines Wertes f(i) aus der Menge A_i).

Man kann zeigen: Zornsches Lemma und Auswahlaxiom sind äquivalent.

3 Reelle Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ natürliche Zahlen.

$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ ganze Zahlen. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. ist kommutativ und Ring mit Eins.

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \in |\mathbb{Z}, q \neq\}$ rationale Zahlen. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$. ist Körper.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (Aus der Schule bekannt. Konstruktion dieser Zahlenmengen: hier nicht!)

$\mathbb{N}$ erfüllt folgende Grundregeln:

3.1 Peano-Axiom

$\mathbb{N}$ enthält ein Element 1 und es gibt eine injektive Abbildung $\vartheta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}$ (Nachfolgerabbildung), so dass gilt: Falls $A \subseteq \mathbb{N}$ und

i) $1 \in A$

ii) Falls $n \in A$, so auch $\vartheta(n) \in A$

dann $A = \mathbb{N}$

Peano-Axiome sind die Basis für folgenden Prinzipien:

3.2 Induktion & Rekursion

a) Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $a(n)$ gegeben. Falls

i) $a(1)$ wahr,

ii) Falls $a(n)$ wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, so auch $a(\vartheta(n))$,

so ist $a(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

(Schreibe auch „n+1“ statt $\vartheta(n)$. Es lässt Addition auf $\mathbb{N}$ definieren.)

b) Rekursionsprinzip:

Sei ein Objekt O(1) aus einer Menge M gegeben und für $n \in \mathbb{N}$ sei eine Vorschrift V_n gegeben ($V_1 : M \rightarrow M$), die aus einem Objekt $O \in M$ ein neues Objekt macht.

Dann definiert die Vorschrift $O(n+1) = V_n(O(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein eindeutiges Objekt $O(n) \in M$.

D.h. es existiert genau eine Funktion:

$\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\tilde{O}(n+1) = V_1(\tilde{O}(n))(\forall n \in \mathbb{N})$

3.3 Axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen

$\mathbb{R}$ ist eine Erweiterung der rationalen Zahlen, also $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Es gilt:

a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist Körper (*Körperaxiom*)

b) $\mathbb{R}$ ist angeordneter Körper, d.h

1) Es existiert $P \subset R$, sofass für jedes $r \in R$ genau eine der Aussagen

   * $r \in R$
   * $r = 0$ (*neutrales Element*)
   * $r \in P$ (*additives inverses Element*)

   zutrifft. (*Anordnungsaxiome*)

2) Falls $a, b \in P$, so ist $a + b \in P, a \cdot b \in P$

c) Bemerkung: Man definiert für $a, b \in \mathbb{R} : a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}$

(Schreibweise auch $b > a$).

$a \leq b \, [a \geq b] \Leftrightarrow (a = b) \vee (a < b) \, [a > b]$

Dann ist „$\leq$“ die Totalordnung auf $\mathbb{R}$.

d) $\mathbb{R}$ ist mit „$\leq$“ vollständig, d.h.

Falls $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ und M nach oben beschränkt, so hat M ein Supremum in $\mathbb{R}$ (vgl. 2.4). (*Vollständigkeitsaxiom*)

Bemerkung: Es gilt auch: Falls $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$, M nach unten beschränkt, so hat M ein Infimum in $\mathbb{R}$.

3.4 Definition

a) Für $a \in \mathbb{R}$ setze $sgn(a) := \begin{cases} 1, a > 0 (a \in P) \\ 0, a = 0 \\ -1, a < 0 (-a \in P) \end{cases}$

b) *Betragsfunktion*: setze $|a| = a \cdot sgn(a)$

3.5 Rechenregeln

1) $|a| = |-a| \geq 0, a = |a| \cdot sgn(a)$
2) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, sgn(a \cdot b) = sgn(a) \cdot sgn(b)$
4) $|a^-1| = |a|^-1$, falls $a \neq 0$ (*Multiplikations Inverses*)
5) $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

   $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$

   $a \leq b \Leftrightarrow ca \leq cb$ Falls $c > 0$, sonst $ca \geq cb$
6) $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ (*Dreiecksungleichung*)

Bemerkung

$1 \in P$. Beweis. 1F (in jedem Körper):$(0 \cdot 1 = 0; 1 \cdot 1 = 1)$

Behauptung: $(-1) \cdot (-1) = 1$

Bemerkung: $(-1) \cdot (-1) - 1 = (-1) \cdot (-1 + 1) = 0 \leftarrow a \cdot 0 = 0$ absorbierendes Element

Wäre $(-1) \in P$ so $(-1)(-1) \in P$, also $1 \in P$ (Widerspruch zu 3.3.b.1)

Mit 3.3.b.1 folgt: $1 \in P$

Beweis 3.5.1:

$|a| = a \cdot sgn(a); |-a| = -a \cdot sgn(a) = -a \cdot -1 \cdot sgn(a) = a \cdot sgn(a)$

$|a| > 0$, falls $a \in P (a = 0)$, so $|a| = a \cdot sgn(a) = a \cdot 1 = a > 0$

analog $a < 0$.

falls $a = 0$, so $|a| = 0$.

Beweis zu ii-v: Ähnlich leicht/trivial.

Beweis zu vi: siehe Übung.

3.6 Satz von Archimedes

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist nicht nach oben beschränkt, d.h. $\forall r \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{R} : n > r$

Bemerkung:

Annahme, $\mathbb{N}$ sei nicht nach oben beschränkt in $\mathbb{R}$.

Dann existiert (Vollständigkeit) $s := sup(\mathbb{N}) \in \mathbb{R}$.

Es ist $s < s + 1$ (da $0 < 1$), also $s - 1 < s$.

Da s kleinste obere Schranke ist, ist s-1 keine obere Schranke für $\mathbb{N}$.

Also existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n > s - 1$. Dann auch $n + 1 \in \mathbb{N}$ und $n + 1 > s$.

Widerspruch dass s kleinste obere Schranke für $\mathbb{N}$ ist.

Daraus folgt: $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt.

3.7 Definition: Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ „(„, “)“ $\Rightarrow$ ausgeschlossen

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ „[„, “]“ $\Rightarrow$ eingeschlossen

Weiter:

$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$

$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$

$(-\infty, a), (-\inf, a]$ entsprechend.

$\mathbb{R}^+ := (0, a)$, $\mathbb{R}_0^+ := [0, a)$, entsprechend $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$

3.8 Endlichkeit auf Abzählbarkeit

a) Eine Menge heißt endlich, falls $M = \emptyset$ (Dann hat M 0 Elemente) oder falls $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $\{1, ..., n\} \to M$ existiert.

Dann hat M n Elemente. (In Zeichen: $cord(M) = n$ oder $\#M = n$)

b) M heißt unendlich, falls M nicht endlich.

c) M heißt abzählbar, falls eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert.

d) M heißt abzählbar unendlich, falls abzählbar und unendlich.

e) M heißt überabzählbar, falls M nicht abzählbar.

Bemerkung:

n aus a) ist, falls es existiert, eindeutig.

3.9 Satz: Unterschiede $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$

a) $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig, $\mathbb{R}$ schon

b) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, $\mathbb{R}$ nicht

Beweis zu a):

Sei $M := \{a \in \mathbb{Q} | a^2 < 2\}$. M ist nach oben beschränkt (z.B. durch 2).

Sei $s := sup(\mathbb{R})$. Annahme $s \in \mathbb{Q}, s^2 = 2$:

Annahme falsch:

1. Fall: $s^2 > 2$

Für alle $n \in \mathbb{N} (s - \frac{1}{n})^2 = s^2 - \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} > s^2 - \frac{2s}{n}$. Nach Archimedes existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $b > \frac{2s}{s^2-2}$. Für dieses n ist $\frac{2s}{n} < \frac{2s}{\frac{2s}{s^2-2}} = s^2 - 2$ und $(s - \frac{1}{n})^2 > s^2 - (s^2 - 2) = 2$.

Es folgt: $s - \frac{1}{n}$ ist obere Schranke für M. Widerspruch zu s kleinste obere Schranke.

2. Fall: $s^2 < 2$

Ähnlich wie oben. $\exists n \in \mathbb{N} (s + \frac{1}{n})^2 < 2$, also $s + \frac{1}{n} \in \mathbb{N}$.

Widerspruch zu s obere Schranke für M.

Da $s \in \mathbb{Q}$ nach Annahme existiert $p, q \in \mathbb{N}, y \neq 0, s = \frac{p}{q}$, also $\frac{p^2}{q^2} = 2$,

$p^2 = 2q^2$ (unmöglich denn Primfaktor 2 steckt links/rechts zu gerader/ungerader Potenz drin).

Also: Annahme falsch, $s \in \mathbb{Q}$

Also: M hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$, also $\mathbb{Q}$ nicht vollständig.

Beweis zu b):

1) Ideenskizze:

$$\begin{array}{cccccccccc} \cdots & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{1} & 0 & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \cdots & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{2} & -\frac{2}{1} & 0 & \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \cdots \\ \cdots & -\frac{3}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{1} & 0 & \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

2) $\mathbb{R}$ überabzählbar: zeige [0,1] ist überabzählbar

Jedes $x \in [0, 1]$ hat Dualbruch der Entwicklung x=0,011001100...

Zeige: Die Menge F der Folgen von der Form (0,1110010...) ist überabzählbar. (Cantonsches Diagonalverfahren)

Annahme: Es existiert die Abzählung $\varphi : \mathbb{N} \to F$ surjektiv,

also $F = \{\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), ...\}$

Definiere eine Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \leq F$ durch $a_i \begin{cases} 1 & \text{, falls } \varphi(i)_i = 0 \\ 0 & \text{, falls } \varphi(i)_i = 1 \end{cases}$

$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \neq \varphi(j) \forall j \in \mathbb{N}$, d.h. (a_j) tritt nicht im Bild von F auf.

Widerspruch zu φ surjektiv!

Also F nicht abzählbar!

φ(1)	φ(2)	φ(3)
~~0~~	1	1
1	~~0~~	1
0	0	~~1~~

3.10 Bemerkung

$\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$, auch über $\mathbb{Q}$.

Die Betragsfunktion (vgl. 3.5) definiert eine Norm auf $\mathbb{R}$.

3.11 Satz: Existenz/Eindeutigkeit m-ter Wurzeln in $\mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ \forall m \in \mathbb{N} \exists_1 x \in \mathbb{R}_0^+ : x^m = a$

(Notation: $x = \sqrt[m]{a^n}$, auch $x = a^{\frac{n}{m}}$, „m-te Wurzel“)

Beweis:

Sei $a \in \mathbb{R}_0^+, m \in \mathbb{N}$ und $M := \{y \in \mathbb{R}_0^+ | y^m \leq a\}$.

Behauptung: M ist nach oben beschränkt durch 1+a.

Beweis:

Falls $a \leq 1$, sonst für $y \in \mathbb{R}$, $y > 1 + a$:

(triviale Induktion) $y^m \geq (1+a)^m \geq 1^m = 1 \geq a$.

Falls $a > 1$, so ist für $y \in \mathbb{R} > 1 + a : y^m > (1+a)^m > a^m \geq a$.

Sei $x := sup(M)$. Dann $x > 0$, also $x \in \mathbb{R}_0^+$.

Falls $x^m < a$, so existiert $n \in N$ mit $(x + \frac{1}{n})^m < a$,

also $x + \frac{1}{n} \in M$. Widerspruch zu x ist obere Schranke.

Falls $x^m > a$, so existiert $n \in N$ mit $(x - \frac{1}{n})^m > a$.

Widerspruch zu x ist kleinste obere Schranke.

Also $x^m = a$.

Eindeutigkeit: Falls $\tilde{x} < x$, so $\tilde{x}^m < x^m = a$. Widerspruch, somit $\tilde{x} = x$

3.12 Satz: Definition

a) $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, d.h.
   $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists q \in \mathbb{Q} : \ |q - a| < \varepsilon$

b) Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen irrationale Zahlen, diese sind auch dicht in $\mathbb{R}$.

Beweis zu 3.12:

Zu a)

Sei $a \in \mathbb{R}$. Falls $a \in \mathbb{Q}$, so gilt: $\forall \varepsilon > 0 : |a - a| = 0 < \varepsilon$

Sei jetzt $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $a > 0$.

Zu $n \in \mathbb{N}$ sei nun $m(n) := max\{k \in \mathbb{N}_0 | \frac{k}{n} \leq a\}$. (wohldefiniert)

Dann $\frac{m(n)}{n} \leq a < \frac{m(n)+1}{n}$, also $|a - \frac{m(n)}{n}| < \frac{1}{n}$.

Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Nach Archimedes existiert $n \in \mathbb{N}, n > \frac{1}{\varepsilon}$, also $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Setze $q := \frac{m(n)}{n} \in \mathbb{Q}$.

Dann $|a - q| < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

4 Komplexe Zahlen

In $\mathbb{Q} : x^2 = 2$ hat keine Lösung, aber in $\mathbb{R}$.

In $\mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung.

Historisch: Cardano (16. Jahrh.) in gewissem Sinn „Geistergrößen“.

Unmystische Erklärung: Gauß, Hamilton (18., 19. Jahrh.).

4.1 Körper der komplexen Zahlen

a) Sei $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{R}\}$.

Außer der komponentenweisen Addition/Subtraktion

$((a,b) \pm (c,d)) = (a \pm c, b \pm d)$

definiert man die Multiplikation komplexer Zahlen durch

$(*) \quad (a,b) \cdot (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

Damit wird $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper.

b) Indem wir $r \in \mathbb{R}$ mit $(r, 0) \in \mathbb{C}$ identifizieren, können wir $\mathbb{R}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$ auffassen, also $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

c) Mit $i := (0,1)$ ist $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1, 0)$ (entspricht -1 in $\mathbb{R}$).

Für $(a,b) \in \mathbb{C}$ ist $(a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1) = a + bi$.

Mit dieser Schreibweise ergibt sich $(*)$ durch formales Ausmultiplizieren unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$:

$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bdi^2 + (bc + ad)i = (ac - bd) + (bc + ad)i$

d) a heißt *Realteil*, b *Imaginärteil* der komplexen Zahl $a + bi$. In Zeichen:

$a = \Re(a + bi); b = \Im(a + bi)$

Beweis: leicht

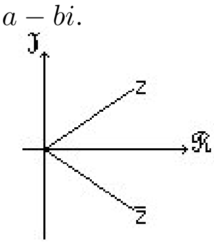
4.2 Definition/Bemerkung

a) Für $z = a + bi \ \in \mathbb{C}$ sei $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (setzt reel. Betr.)

Es gilt: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

b) Für $z = a + bi$ ist die konjugierte komplexe Zahl $\overline{z}$ definiert durch $\overline{z} = a - bi$.

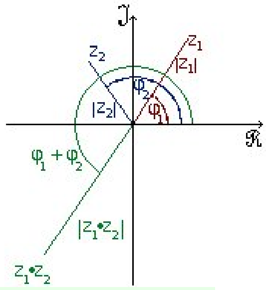
Die *Konjugation* $z \mapsto \overline{z}$ ist vertauschbar mit Grundrechenarten, also:



$\overline{z_1 \underset{\cdot}{\pm} z_2} = \overline{z_1} \underset{\cdot}{\pm} \overline{z_2}$; $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{z_1}{z_2}$ falls $z_2 \neq 0$.

Weiter: $|\overline{z}| = |z|$

4.3 Geometrische Veranschaulichung der komplexen Multiplikation



Die Multiplikation $\mu_z : \begin{matrix} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ w \mapsto z \cdot w \end{matrix}$ mit einer festen komplexen Zahl w ist geometrisch nämlich:

- Drehung um den zu z gehörigen Winkel.
- Streckung mit Faktor $|z|$.

Beweis: Später; Hier z.B. kein präziser Winkelbegriff vorhanden

5 Induktive Beweise

5.1 Rekursive Definitionen (einige)

a) *Fakultäten*:

$0!=1$, $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ (Präz. von $n! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$)

Binomialkoeffizient:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(= \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \right)$ $(k, n \in \mathbb{N}_0,\ k \in \{0, ..., n\})$

b) *Summen/Produktzeichen*:

Für $j \in \mathbb{N}_0$ sei eine Zahl $a_j \in \mathbb{C}$ gegeben.

Def. $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j$ und $\prod\limits_{j=0}^{n} a_j$ rekursiv durch

$$\sum_{j=0}^{0} a_j = a_0, \sum_{j=0}^{n+1} a_j = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \right) + a_{n+1}$$

$$\prod_{j=0}^{0} a_j = a_0, \prod_{j=0}^{n+1} a_j = \left(\prod_{j=0}^{n} a_j \right) \cdot a_{n+1}$$

c) *Ganzzahlige Potenzen*:

Für $a \in \mathbb{C}:\ a^0 := 1,\ a^{n+1} = a \cdot a^n,\ a^{-n} := (a^n)^{-1}$ falls $a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}_0$

5.2 Binomialsatz

Für $a, b \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_0$ ist $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Beweis n=0:

$$(a+b)^0 = 1 \text{ (links)}; \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^0 b^0 = 1 \text{ (rechts)}$$

Beweis $n \to n+1$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot (a+b)^n = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= a^{n+1}b^0 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)}_{\binom{n+1}{k}} a^k b^{n+1-k} + a^0 b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

5.3 Geometrische Summenformel

Für $n \in \mathbb{N}_0,\ a, b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$b^{n+1} - a^{n+1} = (b-a) \cdot \sum_{n=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

Beispiel: $b^2 - a^2 = (b-a) \cdot (b+a)$

Spezialfall: $b := 1,\ a := q$

$$1 - q^{n+1} = (1-q) \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k,$$

im Fall $q \neq 1$: $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1+q^{n+1}}{1-q}$

Beweis: (n=0: trivial) $n \to n+1$:

$$b^{n+2} - a^{n+2} = b \cdot b^{n+1} - a \cdot a^{n+1} = bb^{n+1} - ba^{n+1} + ba^{n+1} - aa^{n+1}$$

$$= b(b^{n+1} - a^{n+1}) - (b-a)a^{n+1} = b(b-a) \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} + (b-a) \cdot 0^{n+1}$$

$$= (b-a)\left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n+1} a^k b^{n+1-k}$$

6 Folgen & Konvergenz

6.1 Definition

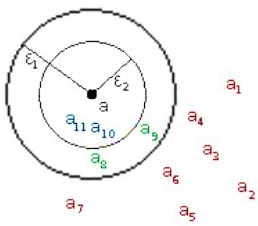
Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Folge in M ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to M$ (auch $\mathbb{N}_0 \to M$).

Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, kurz auch (a_n) (statt $n \mapsto a(n)$).

a_n ($\in M$) ist das n-te Glied der Folge.

Üblicher Missbrauch: „$(a_n) \subset M$“, korrekt $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subset M$.

6.2 Definition: Konvergenz/Grenzwert von Folgen



a) $(a_n) \subset \mathbb{C}$ heißt *konvergent* gegen den *Grenzwert* $a \in \mathbb{C}$

(in Zeichen: $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_z \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$), falls gilt:

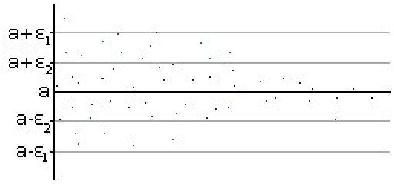
$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ |a_n - a| < \varepsilon$

b) (a_n) heißt konvergent, falls ein $a \in \mathbb{C}$ existiert mit $a_n \to a$, sonst *divergent*.

Sprechweise: „$a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$“ bedeutet: $\forall R \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq N :\ a_n \geq R$.

Genereller Nutzen:
Vereinfachung komplizierter Ausdrücke, indem man sie für „große“ n durch den *Limes* für $n \to \infty$ ersetzt.

$$a_n = \frac{n^3-2n+5}{4n^3+3n^2+13} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$



6.3 Bemerkung

Der Grenzwert a in 6.2 ist, falls er existiert, eindeutig bestimmt.

Beweis:

Seien $a, b \in \mathbb{C}$, $(a_n) \subset \mathbb{C}$ Folge, $a_n \to a$, $a_n \to b$. zu $\varepsilon > 0$ existiert $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N_1 : \ |a_n - a| < \varepsilon$. Weiter existiert $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N_2 : \ |a_n - b| < \varepsilon$. Somit $\forall n > max\{N_1, N_2\} : \ |a_n - a| < \varepsilon$ und $|a_n - b| < \varepsilon$.

Für solche n folgt: $|a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon$.
Dies ist für alle $\varepsilon > 0$ so, also: $|a - b| = 0$.

6.4 Rechenregeln

1. Falls $a_n \to a, \ b_n \to b$, so $a_n \underset{\cdot}{\pm} b, \ |a_n| \to |a|$

   Falls $b \neq 0$, so existiter $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_0 : b_n \neq 0$, und dann $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

   (Grenzwertbildung vertauschbar mit Grundrechenarten und mit Betrag.)

   Beweis: (± trivial) Exemplarisch „·“:

   Es gilt $a_n \to a, b_n \to b$. (b_n) ist beschränkt, dann zu $\varepsilon := 1$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n > N : \ |b_n - b| \leq \varepsilon$. Somit $\forall n \geq N : \ |b_n| = |b_n - b + b| \leq |b_n - b| + |b| < |b| + 1$.

   Also $\forall n \in \mathbb{N} : \ |b_n| \leq max \begin{cases} max(b_j), |b| + 1 \\ j = 1, N \end{cases} =: B$

   Ebenso: $\exists A > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N} : \ |a_n| \leq A$

   Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N_1 : \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2B}$

   Analog: Es existiert $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N_2 : \ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2A}$

   Für $n \geq max\{N_1, N_2\}$ ist

   $|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + ab_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)|$

   $\leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

   Also: $a_n b_n \to ab$

2. $a_n \to a \Rightarrow$ [Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $a_{n+n_0} \to a$]
3. Falls $\forall n \in \mathbb{N} : \ a_n \leq b_n$ und $a_n \to a, \ b_n \to b$, so auch $a \leq b$.

   Speziell, falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_1 \leq c \in \mathbb{R}$, so auch $a \leq c$. $\Rightarrow$ Für $(a_n), (b_n \in \mathbb{R})$
4. Falls $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{C}, \ b_n \in \mathbb{R} : |a_n| \leq b_n$ und $b_n \to 0$, so $a_n \to 0$.
5. (a_n) konv. $\Rightarrow (a_n)$ beschränkt, d.h.: $\exists c > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N} : \ |a_n| \leq c$

6.5 Beispiele

1) $a_n : \frac{1}{n},\ a_n \to 0\ (n \to \infty)$.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Archimedes existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \geq N$ folgt: $|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

2) $a_n := (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}_0.\ a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1...$ (a_n ist divergent)

6.6 Beispiele für Grenzwertberechnung

a) $a_n := \frac{n^2+3}{2n^3+n}\ (n \in \mathbb{N}),\ |a_n| = \frac{n^2}{2n^3+n} + \frac{3}{2n^3+n} \leq \frac{n^2}{2n^3} + \frac{3}{n} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{3}{n}}_{\to 0} \to 0$

b) $a_n := \frac{4n^3-7n^2+1}{3n^3+n+2} = \frac{n^3(4-\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^3(3+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3})} \underset{\frac{1}{n} \to 0}{\longrightarrow} \frac{4}{3}$

6.7 Teilfolgen & Häufungspunkte

1) Eine Folge (b_n) heißt *Teilfolge* der Folge (a_n), falls gilt:

   Es gibt ein $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend.

   $(\varphi(j+1) > \varphi(j) \forall j \in \mathbb{N})$, so dass

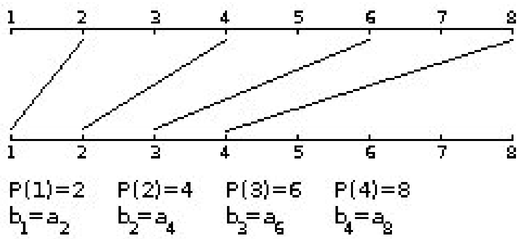
   $\forall n \in \mathbb{N}:\ b_n = a_{\varphi(n)}$.

   Missbräuchliche Notation „$(b_n) \subset (a_n)$“ für (b_n) ist Teilfolge von (a_n).

   Bemerkung: Für $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ str. wachsend ist $\forall n \in \mathbb{N}:\ \varphi(n) \geq n$.

2) $x \in \mathbb{C}$ heißt *Häufungspunkt* der Folge $(a_n) \subset \mathbb{C}$, wenn gilt:

   Es existiert eine Teilfolge $(b_n) \subset (a_n)$ mit $(b_n) \to x$.



6.8 Bemerkung

$a_n \to x \Leftrightarrow$ jede Teilf. $(b_n) \subset (a_n)$ erfüllt $b_n \to x$

Beweis: leicht

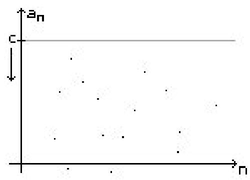
Beispiel:

$a_n := (-1)^n$ nicht konvergent; $(a_{2n}) \to 1$; $(a_{2n+1}) \to -1$

a_n hat die Häufungspunkte: +1, -1 .

6.9 Satz & Definition

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ beschränkt (d.h. es ex. $c > 0$ mit $\forall n \in \mathbb{N}: \ |a_m| < c$).



Dann gibt es einen größten und einen kleinsten Hp von (a_n), die mit limes superior ($\overline{\lim}$) bzw. limes inferior ($\underline{\lim}$) bezeichnet werden.

kurz: $\overline{\lim}\ a_n$, $\underline{\lim}\ a_n$

Beweis:

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ex. $c \in \mathbb{R}$ mit $\{n \in \mathbb{N} | a_n > c\}$ endlich.

Sei $s := inf\{c \in \mathbb{R} | \{n \in \mathbb{N} | a_n > c\}\}$ endlich}. Dann $M \supset (s; \infty)$!

Behauptung: s ist Hp von (a_n).

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann $s - \varepsilon \notin M$, also existieren unendlich viele Folgeglieder $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > s$, also existiert $n \in \mathbb{N}, n > N$ mit $a_n > s - \varepsilon$.

Damit konstruiere Teilfolge

$(a_{\varphi(j)}) \subset (a_n)$ mit $\forall j \in \mathbb{N}: \ (a_{\varphi(j)}) > s - \frac{1}{j}$.

Falls $(a\varphi(j)) \not\to s$, so ex. $\varepsilon_0 > 0$ und eine Teilf. $(a_{\psi(j)})$ von $((a_{\varphi(j)}))$, so dass $\forall j \in \mathbb{N}: \ a_{\psi(j)} \geq s + \varepsilon_0$. *Widerspruch* zu $s + \varepsilon_0 \in M$, da alle $((a_{\psi(j)}))(j \in \mathbb{N})$ $(a_{\psi(j)}) > s + \varepsilon_0$ erfüllen.

Also $(a_{\varphi(j)}) \to s$

2. Behauptung: s ist größter Hp von (a_n)

Beweis:

Sei x Hp von (a_n). Z.z. ist: $x \leq s$.

Es existiert Teilf. $(a_{\varphi(j)}) \subset (a_n)$ mit $(a_{\varphi(j)}) \to x$.

Falls $x > s$, so existiert zu $\varepsilon := \frac{x-s}{2} > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$\forall n \geq n_\varepsilon: \ |a_{\varphi(j)} - x| < \varepsilon$. Für solche $n \geq n_\varepsilon$ folgt, dass

$(a_{\varphi(n)}) = \underbrace{(a_{\varphi(n)}) - x}_{> a - \varepsilon} + x > x - \varepsilon = \frac{x+s}{2} > s$ *Widerspruch* zu

$s + \varepsilon_0 \in M$, da alle $(a_{\psi()})()$

Also $x \leq s$

Beweis $lim\ inf$ analog.

6.10 Satz: Bolzano Weierstraß

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ beschränkte Folge. Dann hat (a_n) einen Häufungspunkt, also eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Nach 6.9 ist z.B. $\overline{\lim}\ a_n$ Hp.

Bemerkung: Gilt auch für $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, insbesondere für $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

6.11 Satz

Sei z.B. (a_n) monoton wachsend, also $a_n \leq a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Setze $a := \overline{\lim}\, a_n$. Es ex. Teilf. $(a_{\varphi(n)}) \subset (a_n)$ mit $a_{\varphi(n)} \to a$.

Sei $\varepsilon > 0$. Es ex. $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq n_\varepsilon :\ |a_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$.

wegen a_n wachsend gilt: $0 \geq a - a_{\varphi(n)} > -\varepsilon$.

Für $n \geq \varphi(n_\varepsilon)$ ist $\varphi(n) \geq n \geq \varphi(n_\varepsilon) \geq n_\varepsilon$ und $a_{\varphi(n)} \geq a_n \geq a_{\varphi(n_\varepsilon)}$ (da (a_j) wachsend).

Also $0 \geq a_{\varphi(n)} - n \geq a_n - a \geq a_{\varphi(n_\varepsilon)} \geq -\varepsilon$, insbes. $|a_n - a| < \varepsilon$.

Also $a_n \to a$

6.12 Definition/Satz: Cauchysches Konvergenzkriterium

a) Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{C}$ heißt Cauchy-Folge, falls gilt:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N} :\ |a_n - a| < \varepsilon$

b) Es gilt: (a_n) ist konf. $\Leftrightarrow$ (a_n) ist Cauchy-Folge

c) Die Eigenschaft, dass jede Cauchy-Folge konvergiert, nennt man auch Vollständigkeit

Beweis:

b) “$\Rightarrow$“: Sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ konv. mit *limes* $a \in \mathbb{C}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Es ex. $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N :\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $m, n \geq N$ gilt:

$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq \underbrace{|a_m - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|a - a_n|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$

„$\Leftarrow$“: (a_n) beschränkt.: Zu $\varepsilon := 1$ ex. $N \in \mathbb{N}$ mit

$\forall m, n \geq N :\ |a_m - a_n| < 1$, speziell $\forall n > N :\ |a_n - a_N| < 1$. Es folgt mit $c := max\{|a_N| + 1, max\{|a_1|, ..., |a_N|\}\} :\ \forall n \in \mathbb{N} :\ |a_n| \leq c$.

Nach Bolzano-Weierstraß ex. $a \in \mathbb{C}$ und Teilfolge

$(a_{\varphi(n)}) \subset (a_n)$ mit $(a_{\varphi(n)}) \to a$.

7 Reihen

7.1 Definition

Sei $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$ Folge.

a) Die zugehörige Reihe $\sum a_n$ (auch $\sum\limits_{n \geq 0} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ etc.) ist die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \geq 0}$, $s_n := \sum\limits_{j=0}^{n} a_j$

b) Die Reihe $\sum a_n$ heißt konvergent/divergent $\Leftrightarrow$ (s_n) konv./div. (Konvergenz der Reihe hängt nicht vom Anfangsindex ab, der Wert (im Konvergenz-Fall) schon!)

Grenzwert von (s_n) wird, falls ex., mit $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

c) $\sum a_n$ heißt absolut konvergent $\Leftrightarrow$ $\sum |a_n|$ konv. (gleichbedeutend: $\sum\limits_{j=0}^{n} |a_j|_{n \geq 0}$ beschr.)

7.2 Bemerkung

$\sum a_n$ absolut konv. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \sum a_n$ konv. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} a_n \to 0$

Gegenbeispiele:

„$\not\Leftarrow_1$“: $\sum\limits_n (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$. alternierende harmon. Reihe, konv. aber nicht abs. konv.

„$\not\Leftarrow_2$“: $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n}$. harmonische Reihe, divergent.

Beweis:

zu „$\Rightarrow_1$“:

Sei $|a_n|$ konv. und $s_n := \sum\limits_{j=n_0}^{n} a_j,\ \sigma_n := \sum\limits_{j=n_0}^{n} |a_j|\ (n \geq n_0)$.

Zeige: (s_n) Cauchy-Folge (also konv.). Es ist (σ_n) konv. also Cauchy-Folge. Sei $\varepsilon > 0$, ex. $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\forall m, n \geq m_\varepsilon : |\sigma_m - \sigma_n| < \varepsilon$. Für solche m, n und $m > n$ ist $|s_m - s_n| = \left| \sum\limits_{j=n+1}^{m} a_j \right| \geq \sum\limits_{j=n+1}^{m} |a_j| = \sigma_m - \sigma_n = |\sigma_m - \sigma_n| < \varepsilon$.

zu „$\Rightarrow_2$“:

Sei $\sum a_n$ konv., dann ist (s_n) Cauchy-Folge, also ex. zu $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\forall m, n \geq n_\varepsilon : |s_m - s_n| < \varepsilon$. Für $n \geq n_\varepsilon + 1$ ist $|a_n| = |s_n - s_{n-1}| < \varepsilon$.

7.3 Satz: Geometrische Reihe

Für $q \in \mathbb{C}$ ist $\sum_n q^n$ konv. $\Leftrightarrow |q| < 1$.

Falls $|q| < 1$, so $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“: $\sum a^n$ konv. $\underset{7.22)}{\Rightarrow} q^n \to 0 \Rightarrow |q| < 1$.

„$\Leftarrow$“: Sei $|q| < 1$, dann ist für $n \geq 0$ $\sum\limits_{j=0}^{n} a^j = \frac{n-q^{n+1}}{1-q} \underset{\substack{n \to \infty \\ q^n \to 0}}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q}$

7.4 Satz: Mayorantenkriterium

Sei $|a_n| \leq b_n\ (n \geq n_0)$, wobei $(a_n) \subset \mathbb{C},\ b_n \subset [0, \infty)$ und $\sum b_n$ sei konv.

Dann auch $\sum (a_n)$ konv. (Also auch $\sum a_n$ konv. nach 7.2 1)).

Beweis:

Sei $s_n := \sum\limits_{j=n_0}^{n} |a_j|$, für $m, n \geq n_0,\ m > n$ ist $|s_m - s_n| = \sum\limits_{j=n+1}^{m} (a_j) \leq \sum\limits_{j=n+1}^{m} b_j$.

Zu $\varepsilon > 0$ ex., da $\sum b_j$ konv., ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\forall m, n \geq n_\varepsilon,\ m > n : \sum\limits_{j=n+1}^{m} b_j < \varepsilon$.

Für solche $m, n :\ |s_m - s_n| < \varepsilon$.

Also (s_n) Cauchy-Folge, also konv.

7.5 Satz: Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n \geq n_0} \subset \mathbb{C}$ und es gebe $q \in [0, 1)$ mit $\forall n \geq n_0 :\ |a_{n+1}| \leq q|a_n|$ (Reicht nicht $(a_{n+1}) < |a_n| \forall n \geq n_0$)

Dann $\sum |a_n|$ konv.

Beweis:

Induktion: $\forall n \geq n_0 :\ |a_n| \leq q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}|$.

Es ist $\sum_n q^{n-n_0} |a_{n_0}|$ konv. $(= |a_{n_0}| \cdot q^{-n_0} \cdot q^n)$ (geometrische Reihe), nach Mayorantenkriterium $\sum |a_n|$ konv.

7.6 Satz: Wurzelkriterium

Sei $(a_n) \subset \mathbb{C},\ \sqrt[n]{|a_n|}$ sei beschränkt und $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$.

Dann $\sum |a_n|$ konv.

Beweis:

Sei $\tilde{q} := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|},\ \tilde{q} \in [0, 1)$. Wähle $q \in (\tilde{q}, 1)$. Dann ex. ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geq N :\ \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$. Folgt: $\forall n > N :\ |a_n| \leq q^n$.

Nach Mayorantenkriterium: $\sum |a_n|$ konv.

7.7 Bemerkung

Falls $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ (oder $\sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschr.), so ist $\sum a_n$ div.

Beweis:

Falls $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so ex. Teilfolge (b_n) von (a_n) mit $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Also $|b_n| > 1$, also $a_n \not\to 0$, $\sum a_n$ div.

7.8 Cauchyscher Verdichtungssatz & Leibnizkriterium

Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ monotone Nullfolge. Dann:

a) $\sum a_n$ konv. $\Leftrightarrow \underbrace{\sum_n 2^n \cdot a_{2^n}}_{\text{verdichtete Reihe}}$ konvergent.

b) $\sum (-1)^n a_n$ konv. (Leibnizkriterium)

Beweis:

zu a)

$s_n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j$. Es gilt $\sum a_n$ kon. $\Leftrightarrow$ (a_n) beschr. $\Leftrightarrow$ (a_{2^n}) beschr.

$$s_{2n} = a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\leq 2n_2} + \overbrace{a_4 + a_5}^{\geq 2a_5} + ... + a_8 + ... + a_{2^{n-1}} + ... + a_{2^n}$$

$\sum 2^n a_{2^n}$ konv. $\Rightarrow \sum a_n$ konv.

Sei z.B. $a_i \geq 0 \forall s \in \mathbb{N}$

Man sieht $\sum a_n$ konv. $\Rightarrow \sum_n 2^{n-1} a_{2^n}$ konv. $\Rightarrow \sum_n 2^n a_{2^n}$ konv.

zu b)

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $s_k := \sum\limits_{n=1}^{k} (-1)^n a_n$. (Seien z.B. $a_n \geq 0\ \forall n:\ (a_n)$ fallend)

Für gerade k: $s_{k+2} = s_k - a_{k+1} + a_{k+2} \leq s_k$;

Für ungerade k: $s_{k+2} = s_k + a_{k+1} - a_{k+2} \geq s_k$.

Also (s_{2k}) fallend, (s_{2k+1}) wachsend.

Weiter $s_0 \geq s_{2k} \geq s_{2k-1} \geq s_1$ für $k \in \mathbb{N}$, somit (s_{2k}) und (s_{2k-1}) monoton und beschr. also konv.

Beispiel:

1) $\sum_n \frac{1}{n^k}$ konv. $\Leftrightarrow \sum 2^n \frac{1}{(2^n)^k}$ konv. $\Leftrightarrow \sum_n \frac{1}{(2^n)^{k-1}}$ konv. $\Leftrightarrow \sum \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^n$ konv. $\underset{geom.Reihe}{\Leftrightarrow}$ $k > 1$; insbesondere $\sum \frac{1}{n}$ divergent.

2) $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konv. (nach Leibniz-Krit.) (Wert=$log_e(2)$)

7.9 Folgerung

Sei $K \in \mathbb{N}_0$ dann ist $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^k}$ konv. $\Leftrightarrow k > 1$ (Gilt auch für $k \in \mathbb{R}$)

Beispiel: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

7.10 Definition/Satz: Umordnung

Sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$. Sei $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (bzw. $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$) bijektiv.

a) Dann heißt die Reihe $\sum\limits_n a_{\varphi(n)}$ eine Umordnung der Reihe $\sum\limits_n a_n$.

(Partialsummen: $\sum\limits_{n=1}^{N} a_{\varphi(n)} + ... + a_{\varphi(N)}$)

b) Falls $\sum\limits_n |a_n|$ konv., so konv auch jede Umordnung von $\sum\limits_n a_n$ gegen den selben Grenzwert.

c) Falls $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $\sum\limits_n a_n$ konv., aber nicht abs. konv ($\sum\limits_n |a_n|$ diverg.), so gilt

$\forall c \in \mathbb{R}\ \exists\ Umordnung \sum\limits_n a_{\varphi(n)}$, die gegen c konv. (Riemannscher Umordnungssatz)

Beweis:

b) Sei $\varphi : \mathbb{N} \hookleftarrow$ bij., $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum\limits_{n \geq N} |a_n| < \varepsilon$, da $\sum |a_n|$ konv.

Es ex. $M \in \mathbb{N}$ mit $\{1, ..., N\} \subset \{\varphi(1), ..., \varphi(M)\}$ Für $n \geq M$:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{\varphi(n)} - \sum_{j=1}^{\infty} a_j \right| = \left| \sum_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l \notin \{\varphi(1), ..., \varphi(n)\}}} a_l \right| \leq \sum_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l \notin \{\varphi(1), ..., \varphi(n)\}}} |a_l|$$

$$\leq \sum_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l \notin \{\varphi(1), ..., \varphi(M)\}}} |a_l| \leq \sum_{\substack{l \in \mathbb{N} \\ l \notin \{1, ..., N\}}} |a_l| < \varepsilon$$

c) Beweisskizze:

1. Es ist $\sum\limits_{\substack{n \\ a_n \geq 0}} |a_n|$ div. und $\sum\limits_{\substack{n \\ a_n < 0}} |a_n|$ div (!).
2. Sei $c \in \mathbb{R}$ nehme positive Summanden, bis Summe gerade $> c$, dann negiere Summanden bis $< c$, dann ...$> c$, dann ... $< c$...

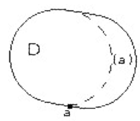
   Konstruiere so rekursiv $P : \mathbb{N} \hookleftarrow$ bij. $\sum\limits_{n} a_{\varphi(n)} \to c$ folgt aus $a_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, wegen $\sum a_n$ konv.

8 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

8.1 Definition

Sei $D \subset C$, $f : D \to \mathbb{C}$ (oder $f : D \to \mathbb{R}$), und $a \in \mathbb{C}$ (nicht unbeding $a \in D$)

Es gebe eine Folge $(a_n) \subset D$ mit $a_n \to a$ (automatisch der Fall wenn $a \in D$).



$f(x)$ hat für $x \mapsto a$ den Grenzwert y (In Zeichen: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = y$), falls gilt:

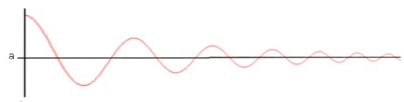
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D, \ |x - a| < \delta : \ |f(x) - y| < \varepsilon$.

Entsprechend falls $R_0 \in \mathbb{R}$ ex. mit $[R_0, \infty) \subset D$:

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 \ \forall x \geq R : \ |f(x) - y| < \varepsilon$

Analog für $\lim\limits_{n \to -\infty} f(x) = y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists R < 0 \ \forall x \leq R : \ |f(x) - y| < \varepsilon$

8.2 Definition/Bemerkung: Stetigkeit



a) f wie in 8.1 heißt stetig im Punkt $a \in D$, falls gilt:

   $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D, \ |x - a| < \delta : \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

   Äquivalent sind:

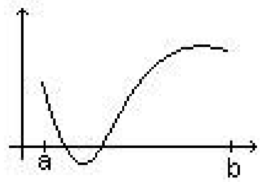
   1) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ ex. $(= f(a))$
   2) Für jede Folge $(x_n) \subset D, \ x_n \to a$ gilt: $f(x) \to f(a)$

   („$\varepsilon - \delta$-Definition der Stetigkeit“)

b) f heißt stetig, falls f bei allen Punkten $a \in D$ stetig ist.

Bemerkung:

1) Falls $D \subset \mathbb{R}$ Intervall, so bedeutet $f : D \to \mathbb{R}$ stetig anschaulich, dass man den Graphen von f „ohne abzusetzen zeichnen“ kann.
2) Sonst: Definition nachprüfen.



Beispiel:

a) $f : \mathbb{R} \hookleftarrow,\ f(x) = x$ ist stetig
b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$ ist stetig
c) $f : \mathbb{R} \hookleftarrow,\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ ist stetig in allen Punkten $x \neq 0$, aber unstetig im Punkt $x = 0$
d) $f : \mathbb{R} \hookleftarrow,\ f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ist unstetig in allen Punkten („Dirichlet-Funktion“)

8.3 Rechenregeln (analog zu Folgen)

$\lim\limits_{x\to a}(f(x) \dot{\pm} g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \dot{\pm} \lim\limits_{x\to a} g(x)$, falls $f(x)$ und $g(x)$ existieren.

Entsprechend für „/“, falls $g(x) \neq 0$.

Analog für $x \to \pm\infty$

8.4 Folgerung

a) f, g in $a \in \mathbb{C}$ und dort stetig, so auch $f \dot{\pm} g$ stetig bei a.

   Falls $g(a) \neq 0$, so auch $\frac{f}{g}$ bei a.

b) f stetig in a, g stetig in $f(a) \Rightarrow\ g \circ f$ stetig in a.

8.5 Definition: Gleichmäßige Stetigkeit

Sei $D \subset \mathbb{C},\ f : D \to \mathbb{C}$ und $a \subset D$.

f heißt gleichmäßig stetig auf A

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall a \in A\ \forall x \in D,\ |x - y| < \delta :\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

f stetig auf A würde bedeuten:

$\forall a \in A\ \exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in D,\ |x - y| < \delta :\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

9 Stetige Funktionen auf Intervallen

Sei stets $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Ein Intervall der Form $[a, b]$ heißt kompaktes Intervall.

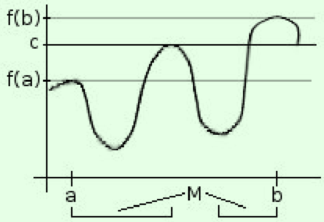
9.1 Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $c \in [f(a), f(b)]$, falls $f(a) < f(b)$, sonst $c \in [f(b), f(a)]$.

Dann $\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = c$

Beweis:

Betrachtet: Fall $f(a) < c < f(b)$ (Restliche Fälle analog bzw. trivial)



Setze $M := \{x \in [a, b] | x \leq c\}$. Dann $a \in M \subset [a, b]$.

Setze $\xi := sup(M)$. Dann $\xi \in [a, b]$.

Es ex. eine Folge $(x_n) \subset M,\ x_n \to \xi$ (!).

Da f stetig bei ξ, gilt: $f(x_n) \to f(\xi)$.

Wäre $f(\xi) < c$, so würde wegen f st. bei ξ ein $\delta > 0$ ex. mit $\xi + \delta < b$ und $\forall x \in [\xi, \xi + b]$. $f(x) < c$.

Wid. zu „ξ o.S. für M“, also $f(\xi) = c$

9.2 Satz: Extrema von st. Funktionen auf [a,b]

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ st. Dann nimmt f auf $[a, b]$ ein Min. und ein Max. an, d.h.

$\exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = min\{f(x) | x \in [a, b]\}$

$\exists \eta \in [a, b] : f(\eta) = max\{f(x) | x \in [a, b]\}$

Beispiel: $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f(x) = x$ hat kein Minimum/Maximum.

Beweis:

1. Behauptung f ist beschr.

Beweis:

Sonst ex. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$

(Funktionale Abhängigkeit: $(n \in \mathbb{N}) \mapsto x_n$ benutzt Auswahlaxiom)

mit $|f(x_n)| \geq n$. Nach Bolzano-Weierstraß ex. konv. Teilfolge $x_{\varphi(n)}$ von (x_n) mit *limes* $x^* \in [a, b]$ $(a \leq x_{\varphi(n)} \leq b \Leftrightarrow a \leq x^* \leq b)$.

Da f st. bei x^*, gilt $f(x_{\varphi(n)}) \to f(x^*)$,

aber andererseits $|f(x_{\varphi(n)})| \geq \varphi(n) \geq n$.

Wid $\Rightarrow$ f ist beschränkt.

2. Sei $\sigma := sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$. Es ex. Folge $(x_n) \subset [a, b]$ mit $f(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} \sigma$.

Nach Bolzano-Weierstraß ex. konv. Teilfolge

$(x_{\varphi(n)}) \subset (x_n)$ mit *limes* $x^* \in [a, b]$.

Da f stetig bei x^*, ist $f(x^*) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x^*) = \sigma$.

Somit $\sigma := max\{f(x) | x \in [a, b]\}$ $(x \hat{=} \eta)$. Min analog.

9.3 Folgerung

Für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ st gilt: $f([a, b]) = [min\{f(x) | x \in [a, b]\}, max\{f(x) | x \in [a, b]\}]$ (gemeint $\{f(x) | x \in [a, b]\}$

Beweis: folgt aus 9.2 und Zwischenwertsatz 9.1

Beispiel: $f : \mathbb{Q} \hookleftarrow$, $f(x) = x^2$, $f(1) = 1$, $f(3) = 9$. 2 tritt nicht als Funktionswert auf!

9.4 Satz

Sei $D \subset \mathbb{C}$; $[a, b] \subset D$ und $f : D \to \mathbb{C}$ st. Dann ist f auf $[a, b]$ sogar gleichmäßig stetig.

Beweis:

Annahme nicht.

Dann $\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in [a, b] \exists y \in D,\ |x - y| < \delta,\ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$.

Also ex. zu $\delta_n = \frac{1}{n}$ $x_n \in [a, b],\ y_n \in D,\ |x_n - y_n| < \frac{1}{n},\ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0$.

Nach Bolzano-Weiertraß ex. konv. Teilfolge $(x_{\varphi(n)}) \subset (x_n)$ mit lim $x^* \in [a, b]$ wegen $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)}$ gilt auch $y_{\varphi(n)} \to x^*$.

Dann, da f st. bei $x^* : f(x_{\varphi(n)}) \to f(x^*),\ f(y_{\varphi(n)}) \to f(x^*)$.

Widerspruch zu $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon_0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

9.5 Definition: Konvergenz von Funktionsfolgen

Sei $D \subset \mathbb{C},\ f_n : D \to \mathbb{C}$ Funktion für $n \in \mathbb{N}$ und $f : D \to \mathbb{C}$.

(f_n) konv. auf D punktweise gegen f

$\Leftrightarrow\ \forall x \in D :\ f_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x)$.

(Bedeutet: $\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

(von ε und n abhängig!))

(f_n) konv. auf D gleichmäßig gegen f

$\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N\ \forall x \in D :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

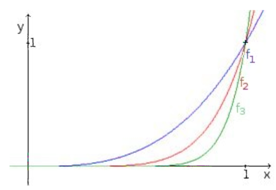
(nur von ε!)

Beispiel:

$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) := x^n$

f_n stetig, $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases} := f(x)$

$f_n \to f$ punktweise. z.B. für $\varepsilon = \frac{1}{10} :\ \nexists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N :\ \forall x \in [0, 1] : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{10}$. $\left(\forall n \in \mathbb{N} :\ f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) = \frac{1}{2}\right)$



10 Potenzreihen, spezielle Funktionen

10.1 Definition

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C},\ z_0 \in \mathbb{C}$. Die (von $z \in \mathbb{C}$ abh.) Reihe $\sum\limits_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ heißt Potenzreihe mit Koeffizienten a_n und mit Entwicklungspunkt z_0. Sie definiert durch $f(z) := \sum\limits_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$ überall dort, wo sie konvergiert. (sicher für $z = z_0$)

10.2 Satz: Konvergeng von Potenzreihen

Für eine Potenzreihe $\sum a_n(z-z_0)^n$ tritt genau einer der folgenden 3 Fälle ein:

1) $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, Potenzreihe konvergiert für alle $z\in\mathbb{C}$

2) $(\sqrt[n]{|a_n|})$ ist beschr., $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}>0$.

   Dann ist mit $\rho := \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$ (Cauchy-Hadamard):

$$\sum a_n(z-z_0)^n = \begin{cases}\text{divergent} & \text{falls } |z-z_0|>\rho\\ \text{konvergent} & \text{falls } |z-z_0|<\rho\end{cases}$$

3) $\sqrt[n]{|a_n|}$ ist unbeschr., $\sum a_n(z-z_0)^n$ konvergent nur für $z=z_0$.

Beweisidee: $\alpha_n : a_n(z-z_0)^n$, Wurzelkrit. für $\sum \alpha_n$.

1) Falls $\sqrt[n]{|a_n|}\to 0$ dann auch $\forall z\in\mathbb{C}:\ \sqrt[n]{|a_n|}\to 0$

2) Falls $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{\rho}>0$, so $lim\ sup\sqrt[n]{|a_n|}=\begin{cases}0 & \text{falls } |z-z_0|>\rho\\ <0 & \text{falls } |z-z_0|<\rho\end{cases}$

3) Falls $\sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschr., so für $z\neq z_0$ auch $\sqrt[n]{|\alpha_n|}$

10.3 Bemerkung: lokale gleichmäßige Konvergenz

Auf jeder abgeschlossenen Kreisscheibe der Form $\{z\in\mathbb{C}||z-z_0|\leq r\}$, die ganz im offenen Konvergenzkreis $\{z\in\mathbb{C}||z-z_0|<\rho\}$ (Konvergenzradius ρ) konvergiert $\sum a_n(z-z_0)^n$ sogar gleichmäßig (absolut).

Beweis:

Sei $\varepsilon>0, r$ wie angegeben.

Dann für $r\in\mathbb{C},\ |z-z_0|\leq r:$

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{a_n(z-z_0)^n}\leq \underbrace{\overbrace{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}^{\text{unabh. v. z mit } |z-z_0|\leq r}}_{=\frac{1}{\rho}\text{ bzw. } 0} < 1.$$

Also existiert $q\in[0,1)$ und $N_0\in\mathbb{N}$ mit $\forall n\geq N:\ |a_n|\cdot|z-z_0|^n\leq q^n$.

Es ex. $N_\varepsilon\geq N_0$ mit $\sum\limits_{n\geq N_\varepsilon} q^n<\varepsilon$, da $\sum\limits_n q^n$ konvergiert.

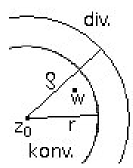
Für $z\in\mathbb{C}$ mit $|z-z_0|\leq r$ folgt

$$\left|\sum_{n=0}^{N_\varepsilon} a_n(z-z_0)^n-\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n-\right|$$

$$=\left|\sum_{n\geq N_\varepsilon} a_n(z-z_0)^n\right|\leq\sum_{n\geq N_\varepsilon}|a_n|\cdot|z-z_0|^n<\varepsilon$$

10.4 Folgerung

Die Summenfunktion $z\to\sum\limits_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ ist stetig im inneren des Konvergenzkreies.



Beweisidee:

Sei ρ der Konvergenzradius, $w \in \mathbb{C}$, $|w - z_0| < \rho$.

Dann mit $r := \frac{|w-z_0|+\rho}{2}$ (bzw. $|w - z_0| + 1$, falls $\rho = \infty$):

$p_N(z) : \sum_{n=0}^{N} a_n(z - z_0)^n : \ p_n|_{B(z_o,r)} \to f|_{B(z_o,r)}$ glm.

$(f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, p_n Polynomfunktion stetig)

Nach Satz von Weierstraß: $f|_{B(z_o,r)}$ st. Falls nun (w_j) Folge, $w_j \to w$, so:

$\exists j_0 \ \forall j \to j_0 : w_j \in B(z_o, r)$.

Somit $f(w_j) = f|_{B(z_o,r)} w_j \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} f|_{B(z_o,r)}(w) = f(w)$

10.5 Satz & Definition

Die Folgenden Potenzreihen konvergieren für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut und definieren somit stetige Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

$$exp(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ...$$

$$sin(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ...$$

$$cos(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ...$$

Beweis exemplarich für $exp(z)$:

$\left| \frac{\frac{z^{j+1}}{(j+1)!}}{\frac{z^j}{j!}} \right| = \frac{|z|}{j+1} \leq \frac{1}{2}$ für $j \geq 2|z|$ Quadrantenkriterium $\Rightarrow$ konvergent.

Bemerkung:

1) $cos(-z) = cos(z)$ (gerade), $sin(-z) = -sin(z)$ (ungerade)
2) Schreibweise oft auch $exp(z) = e^z$
3) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $exp(x),\ sin(x),\ cos(x) \in \mathbb{R}$

10.6 Funktionalgleichung der exp-Funktion

Für $x, z \in \mathbb{C}$ ist $exp(x + y) = exp(x) \cdot exp(y)$.

Beweis: e^{x+y}

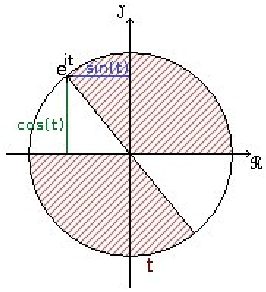
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x+y)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot \left(\sum_{l=0}^{n} \binom{j}{l} \cdot x^l \cdot y^{j-l} \right)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j>l} \frac{1}{j} x^l y^{j-l} \frac{j!}{l!(j-l)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \left(\sum_{j \geq l} \frac{y^{j-l}}{(j-l)!} \right)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} \left(\sum_{j \geq l} \frac{y^j}{j!} \right) = \left(\sum_{j \geq 0} \frac{y^j}{j!} \right) \left(\sum_{l \geq 0} \frac{x^l}{l!} \right)$$

$$= e^y \cdot e^x$$

10.7 Satz: Formel von Euler de Moivre



Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $e^{iz} = cos(z) + isin(z)$.

Speziell für $t \in \mathbb{R}$: $e^{it} = \underbrace{cos(t)}_{\in\mathbb{R}} + i\,\underbrace{sin(t)}_{\in\mathbb{R}}$.

Also $cos(t) = \Re(e^{it})$, $sin(t) = \Im(e^{it})$.

Weiter: $|e^{it}| = 1$

Beweis:

1. $e^{iz} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{iz)^j}{j!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$
$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}}_{=cos(z)} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1) z^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{=sin(z)}$$
2. Für $t \in \mathbb{R}$: $cos(t) \in \mathbb{R}$, $sin(t) \in \mathbb{R}$
und $cos(t) = \Re(e^{it})$, $sin(t) = \Im(e^{it})$.
Für $z = a + bi$ ist $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$,
also $|e^{it}|^2 = e^{it} \cdot e^{-it} = (cos(t) + isin(t)) \cdot (cos(t) - isin(t))$
$= (cos(t) + isin(t)) \cdot (cos(-t) + isin(-t)) = e^0$,
also $|e^{it}| = 1$

10.8 Folgerung

$\forall z \in \mathbb{C} : cos^2(z) + sin^2(z) = 1$

Beweis:

$1 = e^{iz} \cdot e^{-iz} = (cos(z) + isin(z)) \cdot (cos(z) - isin(z))$

$= cos^2(z) + cos(z)sin(z) - cos(z)sin(z) + sin^2(z) = cos^2(z) + sin^2(z) = 1$

10.9 Folgerung: Additionstheoreme

Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$cos(x \pm y) = cos(x)cos(y) \mp sin(x)sin(y)$

$sin(x \pm y) = sin(x)cos(y) \pm cos(x)sin(y)$

Beweis:

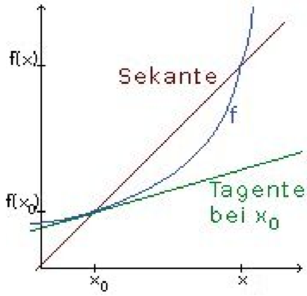
$e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} = (cos(x) + isin(x)) \cdot (cos(y) + isin(y))$

$= cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y) + i(sin(x)cos(y) + cos(x)sin(y))$

$= cos(x + y) + isin(x + y)$

Vergleiche Real- und Imaginärteil!

11 Differenzierbarkeit



Notation: $B(z_0, \delta) := \{z \in \mathbb{C} \| z - z_0| < \delta\}$

für $z_0 \in \mathbb{C},\ \delta > 0,\ B(x_0, \delta) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

11.1 Definition

Sei $D \subset \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) und $x_0 \in D$ „innerer Punkt“ von D (d.h. es ex. $\delta > 0$ mit $B(x_0, \delta) \subset D$)

Sei $f : D \to \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$)

a) f heißt bei x_0 differenzierbar (diffbar) $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.

Der Grenzwert wird dann mit $f'(x_0)$ bezeichnet (auch $\frac{df}{dx}(x_0),\ \dot{x}(x_0)$) („Ableitung von f an der Stelle x_0“)

b) Falls f bei allen $x_0 \in D$ diffbar, so heißt f diffbar.

Dann heißt die Funktion $f' : D \ni x_0 \to f'(x_0)$ Ableitung von f.

Im reellen Fall: Steigung (Sekante) $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (Differenzenquotient).

11.2 Bemerkung

Falls x_0 immer Punkt von D, so ist Diffbarkeit von f äquivalent mit jeder der folgenden Bedingungen:

1) $\exists \alpha \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} : \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \alpha \right| < \varepsilon$

2) $\exists \alpha \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B(x_0, \delta) :$

$|f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)| \leq \varepsilon |x - x_0|$

3) Es existiert $\delta > 0$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ und $r : B(x_0, \delta) \to \mathbb{C}(\mathbb{R})$ stetig bei $x_0,\ r(x_0) = 0$ so dass gilt:

$\forall x \in B(x_0, \delta) : f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$

(Fehler: $r(x)(x - x_0)$)

Bemerkung:

2) und 3) drücken aus, dass der Fehler in der Approximation

$f(x) - f(x_0) \approx \alpha x - x_0$ auch bei Division durch $|x - x_0|$ für $x \to x_0$ gegen 0 konvergiert.

Falls Bedingungen 1) bis 3) in 11.2 gelten, so ist $\alpha = f'(x_0)$

11.3 Linearität der Ableitung der Zuordnung $f(x_0) \mapsto f'(x_0)$

Falls f, g diffbar bei $x_0, \lambda \in \mathbb{C}$ so ist auf $(f + g)',\ \lambda \cdot f$ diffbar bei x_0

und $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),\ (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$

11.4 Satz

f bei x_0 diffbar $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f bei x_0 stetig.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Nach 11.2 3): $f(x) = f(x_0) + \underbrace{\alpha(x-x_0)}_{x\to 0} + \underbrace{r(x)(x-x_0)}_{\substack{\to 0\\ x\mapsto x_0}} \underset{x\mapsto x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$

„$\not\Leftarrow$" $f(x)=|x|$ bei $x_0=0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} +1 & ,x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} |x|$ existiert nicht.

11.5 Bezeichnung

Sei $f: D\to\mathbb{C}$ diffbar. f heißt stetig diffbar, falls $f': D\to\mathbb{C}$ stetig ist.

Falls f' wieder (bei $x_0\in D$) diffbar, so heißt $(f')' := f''$ bzw. $(f')'(x_0) := f''(x_0)$ zweite Ableitung von f (bei x_0).

Entsprechend f''', allgemein $f^{(k)}(x_0)$ bzw. $f^{(k)}$ (k-te Ableitung), $f^0 := f$.

f heißt k-mal stetig diffbar, falls $f^{(k)}$ auf D existiert und stetig ist. In Zeichen: $f\in\mathcal{C}^k(D,\mathbb{C}\ (bzw.\ \mathbb{R}))$. $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{C}(\mathbb{R}))$ bedeutet $f: D\to\mathbb{C}$ stetig. $\mathcal{C}^\infty(D,\mathbb{C}(\mathbb{R}))$ bedeutut beliebig oft diffbare Funktion.

Für $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bedeutet $f'(a)$ die rechtsseitige Ableitung $(\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a})$, für $f'(b)$ die linksseitige Ableitung $(\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} \frac{f(x)-f(b)}{x-b})$

Entsprechend ist $\mathcal{C}^k([a,b],\mathbb{C}(\mathbb{R}))$ zu verstehen.

11.6 Bemerkung

Für $n\in\mathbb{N}_0$ ist $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}, z\mapsto z^n$ diffbar, $f'(z) = n\cdot z^{n-1}$ (0 für n=0)

Beweis:

$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}$ =(geometrische Summenformel): $\frac{(z-z_0)\cdot\sum\limits_{j=0}^{n-1} z^j\cdot z_0^{n-1-j}}{z-z_0}$

$= \sum\limits_{j=0}^{n-1} \underbrace{z^j\cdot z_0^{n-1-j}}_{\substack{\to z_0^{n-1}\\ z\to z_0}} = n\cdot z_0^{n-1}$

Für $n=0$: $f(z)=f(z_0)=1,\ f'(z_0)=0$

11.7 Bemerkung

Für $n\in\mathbb{N}$ ist $f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C},\ z\mapsto z^{-n}$ diffbar, $f'(z) = -nz^{-n-1}$

11.8 Ableitungsregeln

a) Produktregel:

Seien f,g diffbar bei x_0 ($\in \mathbb{R}$ oder $\in \mathbb{C}$), dann auch $f \cdot g$.

Und falls $g(x_0) \neq 0$, dann auch $\frac{f}{g}$ bei x_0 diffbar.

$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

b) Kettenregel:

f diffbar bei x_0, g diffbar bei $f(x_0) \Rightarrow g(f(x_0))$ diffbar bei x_0 .

$(f \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Beweis:

a) Nein

b) Idee: $f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0) + f(x_0)$, $g(x)$
$= g'(x_0)(x - x_0) + \tilde{r}(x)(x - x_0) + r(x_0)$
$\Rightarrow g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0))$
$+\tilde{r}(f(x))(f(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0))$
$= g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f'(x_0)(x - x_0))$
$+\underbrace{g'(f(x_0))r(x)(x - x_0) + \tilde{r}(f(x))(f(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0))}_{=:R(x)}$

z.z.: $\lim\limits_{x \to x_0 x \neq x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$.

Dies folgt aus $r(x) \underset{x \mapsto 0}{\longrightarrow} 0$ und $\tilde{r}(x) \underset{x \mapsto 0}{\longrightarrow} 0$

Beachte: $f(x) \underset{x \mapsto x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$, da f stetig bei x_0

Bemerkung zur Beweisidee bzw. „klassischen“ Schreibweise (Leibniz):

z.B. Produkt: $f(x) = f(x_0) + \Delta f$, $g(x) = g'(x_0) + \Delta g$

$\Rightarrow (f \cdot g) = f(x_0)g(x_0) + \Delta f g(x_0) + \Delta g f(x_0) + \Delta f \Delta g$

Leibniz: $\delta(f \cdot g) = \delta f g + f \delta g$

Man sieht: Ableitung (=Limes von Diffquot) vereinfacht die Formeln, die man für endliche Differenzen kriegen würde.

11.9 Satz: Diffbarkeit von Potenzreihen

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $\varrho > 0$, die Potenzreihe $\sum a_n(z - z_0)^n$ konvergiere auf $B(z_0, \varrho)$.

a) Dann ist die Summenfunktion $f : B(z_0, \varrho) \to \mathbb{C}$; $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ diffbar und $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(z - z_0)^{n-1}$ (Gliedweises Differenzieren) .

b) Die abgeleitete Potenzreihe hat den selben Konvergenzradius wie die ursprüngliche.

Beweis:

a) Der Fall $z_0 = 0$: Für z: $w \in B(0, \varrho)$, $z \neq w$ ist $\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z^n - w^n)}{z - w}$

$$= \frac{\cancel{(z-w)} \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{n-1} z^j w^{n-j-1}}^{=:\varphi_w(z)}}{\cancel{(z-w)}} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{n=j+1}^{\infty} a_n w^{n-j-1}$$

(Doppelreihe konvergiert bzgl. z gleichmäßig auf $B(0, \tilde{\varrho})$, $\tilde{\varrho} := \frac{|w|+\varrho}{2}$).

φ_w stetig bei $z = w$, also: ex. $lim \varphi_w(z) = \varphi_w(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n w^{n-1}$

Also $f^n(w)$ ex. $= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n w^{n-1}$

Falls $z_0 \neq 0$: Betrachte $\tilde{f}(z) = f(z_0 + z)$, $z \in B(0, \beta)$, wende obigen Fall an.

b) folgt aus $\sqrt[n]{n} \underset{n \mapsto \infty}{\longrightarrow} 1$

11.10 Folgerung

$exp, \ sin, \ cos \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ und $exp' = exp, \ sin' = cos, \ cos' = -sin$

Beweis:

$$exp'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \cdot j \cdot z^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{j-1}}{(j-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = exp(z)$$

Rest ähnlich oder nach $cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

11.11 Folgerung

Falls $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ (auf $B(0, \varrho)$ konv. Potenzreihe), so ist

$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, also $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$

Beweis:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \ f^{(n)}(z_0) = a_n \cdot n! + 0 + 0,$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

11.12 Folgerung: Identitätssatz für Potenzreihen

Seien $f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$, $g(z) = \sum b_n (z - z_0)^n$ auf $B(z_0, \varrho)$ konv. Potenzreihen und es gebe $(w_j) \subset B(z_0, \varrho), w_j \to z_0, w_j \neq z_0, \forall j \in \mathbb{N} : f(w_j) = g(w_j)$.

Dann $\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = b_n$

Beweis:

$$f(z_0) = \lim_{j \to \infty} f(z_j) = \lim_{j \to \infty} g(w_j) = g(z_0) = a_0 = b_0$$

Sei $a_j = b_j, \ j = 0, ..., n$ gezeigt.

Dann $f(z) - g(z) = \sum_{j \geq n+1} (a_j - b_j)(z - z_0)^{n+1} = (z - z_0) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (a_{n+1+k} - b_{n+1+k})(z - z_0)^k}_{=:h(z)}$

Für $j \in \mathbb{N}: \; 0 = f(w_j) - g(w_j) = \underbrace{(w_j - z_0^{n+1})}_{\neq 0} \cdot h(w_j)$,

also $h(z_0) = 0 = a_{n+1} - b_{n+1}$.

Somit $\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = b_n$.

11.13 Definition: Lokale (und andere) Extrema

Sei $D \subset \mathbb{C}, \; f : D \to \mathbb{R}$. f hat bei $x_0 \in D$ ein lokales Maximum (Minimum)

$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \forall x \in D \cap B(x_0, \delta) : f(x) \leq (\geq) f(x_0)$.

Ein Max (Min) bei x_0 heißt strikt, falls für $x \neq x_0$ die Ungleichung strikt ist ($<$ ($>$) statt $\leq$ ($\geq$))

Ein Max (Min) bei x_0 heißt global, falls $\forall x \in D : f(x) \leq (\geq) f(x_0)$

11.14 Extrema & Ableitungen

Sei f bei x_0 diffbar und habe dort ein lokales Extremum (Max/Min).

Dann ist $f'(x_0) = 0$ ($f : D \to \mathbb{R}, \; D \subset \mathbb{R}$)

Beweis:

Da f diffbar bei x_0 ist x_0 innerer Punkt von D, also ex. $\delta > 0$ mit $\underbrace{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}_{=:I} \subset \mathbb{R}$ und $f(x_0)$ größter/kleinster Funktionswert in I.

Für $x \in I, \; x \neq x_0$ ist im Fall „Max“ $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \leq 0 & \text{,falls } x > 0 \\ \geq 0 & \text{,falls } x < 0 \end{cases}$

Folgt $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$.

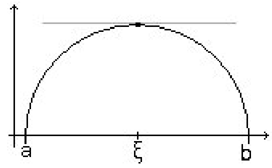
Fall „Min“ analog.

Beispiel:

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \; f(x) = x, \; f$ hat bei 0 Minimum, bei 1 Maximum, aber $f'(0) \neq 0 \quad \wedge \quad f'(1) \neq 0$

12 Mittelwertsatz, Monotonie & Logarithmus

12.1 Satz von Rolle



Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ st. und auf (a,b) diffbar und $f(a) = f(b) = 0$.

Dann ex. $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$

Beweis:

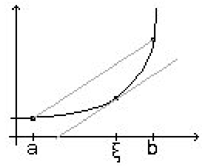
Nach §6 nimmt auf $[a,b]$ ein Max und ein Min an, etwa bei ξ_1 bzw. ξ_2.

Falls $\{\xi_1, \xi_2\} \subset \{a,b\}$, so $f = 0$ auf $[a,b]$. Behauptung klar.

Sonst ex. $j \in \{1,2\}$ mit $\xi_j \in (a,b)$.

Nach 11.14: $f'(\xi_j) = 0$

12.2 Mittelwertsatz



Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ st. und auf (a,b) diffbar.

Dann ex. $\xi \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Beweis:

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(r) := f(t) - (f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(1-a))$

φ ist st. und auf (a,b) diffbar.

$\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$.

Nach Rolle ex. $\xi \in (a,b) : \varphi'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

12.3 Folgerung: Ableitung & Monotonie

Falls f auf (a,b) diffbar und auf $[a,b]$ st., so gilt:

$f' \geq 0$ (> 0) auf $(a,b) \Rightarrow$ f (streng) wachstend auf $[a,b]$.

$f' \leq 0$ (< 0) auf $(a,b) \Rightarrow$ f (streng) fallend auf $[a,b]$.

Beweis:

Falls z.B. $f' > 0$ auf (a,b), so ex. für $x, y \in [a,b]$, $x < y$ ein $\xi \in [x,y]$:

$$\underbrace{\frac{f(y)-f(x)}{y-x}}_{>0} = f'(\xi) > 0,$$

also $f(y) > f(x)$. Rest analog.

12.4 Folgerung

Sei x_0 innerer Punkt des Intervalles I und sei $f : I \to \mathbb{R}$ diffbar, in x_0 zweimal diffbar.

Dann gilt: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ hat lokales Minimum.

Dann gilt: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ hat lokales Maximum.

Beweisidee:

Falls $f'(x_0) = 0 < f''(x_0)$, dann für x nahe x_0 :

$$f'(x) = \begin{cases} > f'(x_0) & \text{falls } x > x_0 \\ < f'(x_0) & \text{falls } x < x_0 \end{cases} (da \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} > 0)$$

Also ex. $\delta > 0$ mit f str. steigend auf $[x_0, x_0+\delta]$ bzw. fallend auf $[x_0-\delta, x_0]$.

Somit bei x_0 lokales Minimum.

Bemerkung:

Unter der Vorr. von 12.4 gilt:

f hat bei x_0 lok. Min$\Rightarrow$ $f''(x_0) \geq 0$ bzw. f hat lokales Max$\Rightarrow$ $f''(x_0) \leq 0$.

12.5 Satz: Ableitung der Umkehrfunktion

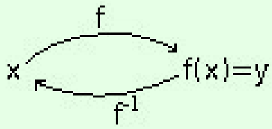
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diffbar und $f' > 0 (< 0)$. Dann ist f injektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : \underbrace{f([a,b])}_{Bild} \to [a,b]$ ist diffbar, es gilt: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = f'(f^{-1}(y))^{-1} (\forall y \in f([a,b]))$

Beweisidee:

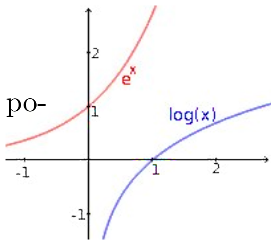
$x \overset{f}{\mapsto} f(x) = y \overset{f^{-1}}{\mapsto} x$

„$\overset{f}{\mapsto}$“: lokaler Streckfaktor $\approx f'(x)$

„$\overset{f^{-1}}{\mapsto}$“: lokaler Streckfaktor $\approx \frac{1}{f'(x)} \approx f^{(-1)}(y)$



12.6 Folgerung & Definition: log



Die auf $\mathbb{R}$ eingeschränkte exp-Funktion $exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist positiv und streng wachsend mit $exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

Sie hat eine Umkehrfunktion $log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Es gilt: $log'(x) = \frac{1}{x}$ $(x \in (0, \infty))$

Beweis:

1. Für $x \geq 0 : exp(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - ... \geq 1$. Für $x < 0$: $exp(x) = exp(-x)^{-1} \in (0,1)$.
2. Wegen $exp' = exp > 0$ ist exp str. wachsend. Weiter $exp'(x) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, $exp'(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Mit ZWS folgt: $exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Ex. die Umkerhfunktion $log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ klar.

   Nach 12.5 ist für $y \in (0, \infty) : log'(y) = \frac{1}{exp'(log(y))} = \frac{1}{exp(log(y))} = \frac{1}{y}$.

12.7 Definition: Allgemeine Potenz

Für $\alpha, x > 0$ sei $x^\alpha = exp(\alpha \cdot log(x))$

12.8 Rechenregeln

Für $x, y > 0$, α, $\beta \in \mathbb{R}$ ist $log(xy) = log(x) + log(y)$, $log(\frac{x}{y} = log(x) - log(y)$, $log(x^\alpha) = \alpha \cdot log(x)$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta$

Beweis:

folgt im wesentlichen aus Funktionalgleichungs für exp.

z.B. $xy = exp(log(xy)) = exp(log(x)+log(y)) = exp(log(x)) \cdot exp(log(y)) = x \cdot y$, also da exp auf $\mathbb{R}$ inj. $log(xy) = log(x) + log(y)$.

12.9 Satz: e-Funktion schlägt alles tot

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha \cdot e^{-\lambda x} = 0$

Beweis:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $x \geq 1$ ist $|x^\alpha| \leq x^{|\alpha|}$.

Es ex. ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $j_0 \geq |\alpha| + 1$.

Für $x \geq 1$ ist $|\frac{x^\alpha}{e^x}| \leq \frac{x^{|\alpha|}}{1+\lambda x+\frac{\lambda^2}{2!}x^2+\ldots+\frac{\lambda^{j_0}}{j_0!}x^{j_0}+\ldots} \leq \frac{x^{|\alpha|}}{\frac{\lambda^{j_0}}{j_0!}x^{j_0}} \leq \frac{j_0!}{\lambda j_0} \cdot \frac{x^{|\alpha|}}{x^{|\alpha|+1}} = \frac{j_0!}{j_0} \cdot \frac{1}{x} \underset{x \mapsto \infty}{\longrightarrow} 0$

12.10 Folgerung: Potenzwachstum stärker als logarithmisches

Für $\alpha > 0$ ist:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{log(x)}{x^\alpha} \to 0$

b) $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \cdot log(x) \to 0$

12.11 Definition: Allgemeine Exp-Funktionen, allgemeiner Logarithmus

Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ist $a^x = exp(log(a^x))$.

Man setzt $log_a(x) = \frac{log(x)}{log(a)}$. Dann $a^{log_a(x)} = x$.

Speziell: log_{10}: Zehner-Logarithmus/dekadischer Logarithmus

12.12 Bemerkung

Für $|x| < 0$ ist $log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \ldots$

13 Taylorsche Satz

Sei $f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ in einer Kreisscheibe um z_0. (Dann: $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0}{f^{(n)}n!}$)

Das k-te Taylorpolynom bei z_0 ist def. durch $(T^k_{z_0} f)(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}z_0}{n!} \cdot (z-z_0)^n$.

$T^k_{z_0} f \to f$ sogar glm. auf jedem Kreis um z_0.

Taylorsche Satz beschreibt den Approximationsfehler und zwar auch für f, die nicht unbedingt durch Potenzreihe gegeben sind.

13.1 Bemerkung

$\frac{d}{dt}\left((T_t^k f)(z)\right) = \frac{f^{(k+1)}(t)\cdot(z-k)^k}{k!}$, falls $f^{(k+1)}(t)$ ex.

13.2 Satz: Taylor

Sei $I \subset \mathbb{R}$ off. Intervall, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $f : I \to \mathbb{R}(k+1)$ mal diffbar.

Dann ex. für $x_0, x \in I, x \neq x_0$ ein ξ zwischen x_0 und x, so dass gilt:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(k)}x_0}{k!}(x-x_0)^k}_{=(T_{x_0}^k f)(x)} + \underbrace{\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}}_{Lagrange-Restglied}$$

Beweis:

Es ex. genau ein $\varrho \in \mathbb{R}$ mit $f(x) - (T_t^k f)(x) = \frac{\varrho(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$.

z.z: $\exists \xi\ zw.\ x_0, x : \varrho = f^{(k+1)}(\xi)$.

Für $g : I \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(x) - (T_t^k f)(x) - \frac{\varrho(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$ gilt: $g(x_0) = 0$ (Wahl von ϱ)

$\Rightarrow g(x) = f(x) - (T_t^k f)(x) = 0$.

Nach Rolle ex. ξ zwischen x_0 und x: $0 = g'(\xi) = -\frac{f^{(k+1)}(\xi)(x-\xi)^k}{k!} - \frac{\varrho}{(k+1)!} \cdot (k+1)(x-\xi)^k \cdot (-1)$

Also $0 = -f^{(k+1)}(\xi)(x-\xi)^k - \varrho(x-\xi)^k$, $\varrho f^{(k+1)}(\xi)$.

Bemerkung:

Falls f beliebig oft diffbar, kann es sein, dass:

Schlecht:

1) die Taylorreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^(n)(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ nur für $z = z_0$ konvergiert.

2) die Taylorreihe in einem Kreis um z_0 konvergiert, aber nicht glm. gegen $f(z)$.

Gut:

3) die Taylorreihe in einem Kreis um z_0 gegen f konvergiert.

Welcher Fall eintritt hängt davon ab, wo die Taylorreihe konvergiert bzw. wo das Restglied gegen 0 geht (für $k \to \infty$).

Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \end{cases}, f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

(Idee: Für Polynomfunktion p von $\lim\limits_{x\to 0} p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$)

$\forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(0) = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}_0 \forall x \in \mathbb{R} : (T_0^k f)(x) = 0$

Ähnlich $g(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$

13.3 Anwendung: Abschätzung von $cos(z)$

$$cos(x) = \underbrace{cos(0)}_{1} + \underbrace{cos'(0)}_{0} x + \underbrace{\frac{cos''(0)}{2!}}_{-\frac{1}{2}} x^2 + \underbrace{\frac{cos'''(0)}{3!}}_{0} x^3 + \underbrace{\frac{cos^{(4)}(\xi)}{4!}}_{|...|\leq\frac{1}{4!}} x^4$$

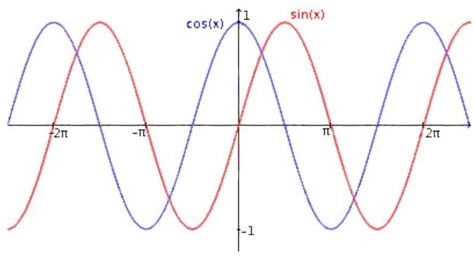
$cos(2) = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + R$, $|R| \leq \frac{1}{4!} cdot 2^4 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \Rightarrow cos(2)$. Also $cos(2) < 0$.

14 Weitere elementare Funktionen

14.1 Satz & Definition: π

Es ist $cos(0) = 1$, $cos(z) < 0$, cos hat in $[0, 2]$ eine kleinste NS ξ und $\xi > 0$. Man definiert $\pi = 2\xi$, also $\xi = \frac{\pi}{2}$.

14.2 Folgerung: Symmetrien von sin bzw. cos



Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $cos(-x) = cos(x)$, $sin(-x) = -sin(x)$

b) $cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x)$, $sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x)$

c) $cos(x \pm \pi) = -cos(x)$, $sin(x \pm \pi) = -sin(x)$

d) $cos(x \pm 2\pi) = cos(x)$, $sin(x \pm 2\pi) = sin(x)$

e) $sin'(x) > 0$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $sin'(x) < 0$ auf $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

Beweis:

a) aus Reihenentwicklung.

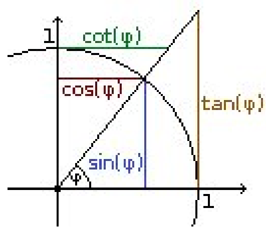
e) 1. Teil: $sin'(x) = cos(x) > 0$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$ nach Def. von π. Auch auf $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ wegen Symmetrie!

b) $cos(\frac{\pi}{2} - x) = cos(\frac{\pi}{2}) \cdot cos(-x) - \underbrace{sin(\frac{\pi}{2}) sin(-x)}_{\substack{cos^2+sin^2=1 \\ sin\ steigend \\ auf\ [0,\frac{\pi}{2}]}} = sin(x)$, Rest leicht.

c), d) leicht.

e) 2. Teil: $sin'(x) = cos(x) = \underbrace{-cos(\underbrace{x - \pi}_{\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})}_{<0}$ für $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

14.3 Definition

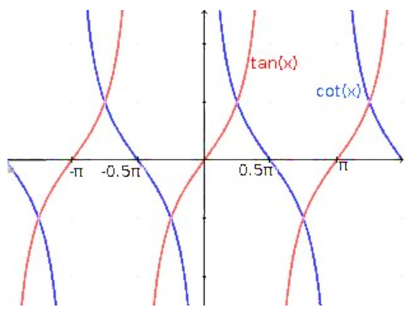


Für $z \in \mathbb{Z}$, $cos(z) \neq 0 : tan(z) := \frac{sin(z)}{cos(z)}$.

Falls $sin(z) \neq 0 : cot(z) := \frac{cos(z)}{sin(z)}$

Reelle Versionen: $cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$,

$tan'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$, $cot'(x) = \frac{1}{sin^2(x)}$



14.4 Satz/Definition: Inverse trigonometrische Funktionen

$sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$, $cos|_{[0,\pi]}$, $tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}$ sind streng monoton und haben Umkehrfunktionen, die mit

$arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $arcsin : [-1,1] \to [0,\pi]$, $arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bezeichnet werden können.

Für $x \in (-1,1)$ (für $arcsin/arccos$) bzw. für $x \in \mathbb{R}$ (für $arctan$) gilt:

$arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Beweis:

Monotonie klar. Ableitung:

$$arcsin'(x) = \frac{1}{sin'(arcsin(x)} = \frac{1}{cos(arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2(arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$arccos'(x) = \frac{1}{cos'(arccos(x)} = -\frac{1}{sin(arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-cos^2(arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$arctan'(x) = \frac{1}{tan'(arctan(x)} = cos^2(arctan(x)) = \frac{1}{1+tan^2(arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

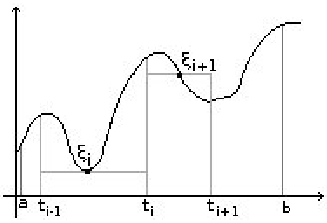
Weitere Funktionen:

$$sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, tanh(z) = \frac{sinh(z)}{cosh(z)}$$

$$sinh^2(z) - cosh^2(z) = 1$$

15 Integration

15.1 Definition



Zerlegung: $\mathcal{Z} = (t_0, ..., t_k)$ von $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$

Hierzu Zwischenvektor (ZV): $\xi = (\xi_1, ..., \xi_k), t_{i-1} \le \xi_i \le t_i, i = 1, ..., k$.

Feinheit für $\mathcal{Z} : \Delta(\mathcal{Z}) := max(t_i - t_{i-1}), i = 1, ..., k$

Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$: Riemannsche Summen $S(\mathcal{Z}, \xi, f) := \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$

Zerlegungsnullfolgen (ZNF): Folge $(\mathcal{Z}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, dazu passende Zwischenvektorfolge (ZVF) $(\xi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$,

$\forall n \in \mathbb{N} : \xi^n \ ZV \ zu \ \mathcal{Z}^{(n)}$

15.2 Satz & Definition

a) Für $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$ gilt: Für jede ZNF $(\mathcal{Z}^{(n)})$ und jede passende ZVF gilt:

   Die Riemannschen Summen $S(\mathcal{Z}^{(n)}, \xi^{(n)}, f)$ konvergieren für $n \to \infty$ und zwar immer gegen denselben Grenzwert, der mit $\int_a^b f(x)dx$ (auch $\int_{[a,b]} f$ oder $\int_a^b f(n)dn$ etc.) bezeichnet wird.

b) Eine beschr. Fu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (in Zeichen: $f \in B([a,b], \mathbb{R})$) $\Leftrightarrow$ Aussage von a) gilt für f (in Zeichen: $f \in R([a,b], \mathbb{R})$)

Beweis a):

Idee: Betrachte zunächst Zerlegung in $\mathcal{Z} = (t_0, ..., t_k), \tilde{\mathcal{Z}} = (\tilde{t_0}, ..., \tilde{tk})$ und zugehörige ZV $\xi, \tilde{\xi}$ derart, dass $\{t_0, ..., t_k\} \subset \{\tilde{t_0}, ..., \tilde{tk}\}$ ($\tilde{\mathcal{Z}}$ Verfeinerung von $\mathcal{Z}$)

In jedem Intervall $t_{i-1}, t_i : f(\xi) \cdot (t_{i-1} - t_i) = \sum\limits_{[t_{j-1}, t_j]} f(\xi_i)(\tilde{t}_j - \tilde{t}_{j-1})$ (Beitrag zu $S(\mathcal{Z}, \xi, f)$)

Beitrag zu $S(\tilde{\mathcal{Z}}, \tilde{\xi}, f) : \sum\limits_{\substack{j,[t_{j-1},t_j] \\ \subset [t_{i-1},t_i]}} f(\tilde{\xi}_i)(\tilde{t}_j - \tilde{t}_{j-1})$

Um beide zu vergleichen, wähle Feinheit $\Delta(\mathcal{Z}) < \delta$, wobei zu $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ so , dass $\forall t, s \in [a, b], |t - s| < \delta : |f(t) - f(s)| < \varepsilon$ (f glm. st)

Ergibt: $|S(\mathcal{Z}, \xi, f) - s(\tilde{\mathcal{Z}}, \tilde{\xi}, f)| \leq \varepsilon \sum\limits_j \tilde{t}_j - \tilde{t}_{j-1} = \varepsilon b \cdot a$

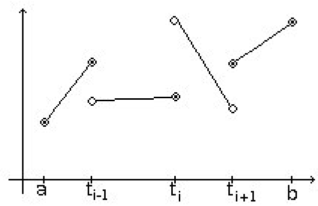
Weiter: Für bel. Zerlegungen $\mathcal{Z}, \tilde{\mathcal{Z}}$: Gemeinsame Verfeinerung $\hat{\mathcal{Z}}$, dazu ZV $\hat{\xi}$, $S(\mathcal{Z}, ...) \overset{\varepsilon}{\leftrightarrow} S(\tilde{\mathcal{Z}}, ...) \overset{\varepsilon/2}{\leftrightarrow} S(\hat{\mathcal{Z}}, ...) \overset{\varepsilon/2}{\leftrightarrow} S(\mathcal{Z}, ...)$

Schließlich: Falls $(\mathcal{Z}_1^{(n)})$ und $(\mathcal{Z}_2^{(n)})$ ZNF, $(\xi_1^{(n)})$ und $(\xi_2^{(n)})$ passende ZVF, so def. $\mathcal{Z}^{(n)} := \begin{cases} \mathcal{Z}_1^{(n)} & n \; gerade \\ \mathcal{Z}_2^{(n)} & n \; ungerade \end{cases}$

Entspr. ZVen $\xi_n^{(n)}$ (Folgenmischung). Dann auf $(S(\hat{\mathcal{Z}}^{(n)}, \hat{xi}^{(n)}, f)$ konv.

Es folgt $lim S(\mathcal{Z}_1^{(n)}, ...) = lim S(\mathcal{Z}_2^{(n)}, ...)$

15.3 Bemerkung



a) Falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig, d.h. Es ex. Zuerlegung $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ von $[a, b]$ so dass $f|_{(t_{i-1},t_i)}$ stetig und $\lim\limits_{\substack{t \to t_{i-1} \\ t > t_{i-1}}} f(t)$ und $\lim\limits_{\substack{t \to t_{i-1} \\ t < t_{i-1}}} f(t)$ ex., $i = 1, ..., k$.

Dann $f \in R([a, b], \mathbb{R})$ und $\int_a^b f(t)dt = \sum\limits_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)dt$ (gemeint: $\int_{t_{i-1}}^{t_i} \tilde{f}_i(t)dt$, $\tilde{f}_i$ st. Forts. von $f|_{(t_{i-1},t_i)}$ in die Randpunkte

b) Für Komplexwertige Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$; $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ def. man:
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i \int_a^b v(x)dx$, falls diese Integrale ex.

c) Uneigentliche Integrale, z.B. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \lim\limits_{\substack{b \to \infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b f(x)dx$, falls diese Integrale und die limites ex.
entspr. $\int_0^{\infty} f(x)dx$ oder $\int_{-\infty}^0 f(x)dx$
Weiter: Falls z.B. f auf (0,1] def., so $\int_0^1 f(x)dx := \lim\limits_{\delta \to 0} \int_\delta^1 f(x)dx$, dalls diese Integrale und der limes ex.

Beispiel:

Für $\delta > 0$ ex. $\int_\delta^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ $(= 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\delta})$, Also hat limes 2 für $\delta \to 0$, also $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$.

15.4 Eigenschaften des Integrals

a) $\int f + \lambda g = \int f + \lambda \int g$ (Linearität)

b) $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ (Monotonie)

c) $|\int f| \leq \int |f|$ (Dreiecksungleichung)

d) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (falls $c \in [a,b]$, auch für bel. c, wenn man im Fall $\int_a^c f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx$ setzt)

(Alles, falls Integrale ex.)

a), c), d) auch für komplexwertige Funktionen.

Beweis:

Idee: Riemannsche Summen, Grenzübergang.

15.5 Definition

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ (I Intervall), $F : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion zu f, falls F' ex. und $F' = f$.

Bemerkung:

Wenn F,G Stammfu'n zu f auf I,

so ex. Konstante c mit $G(x) = F(x) + c \forall x \in I$

Beweis:

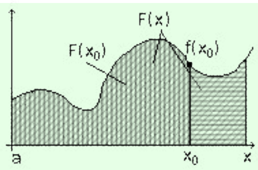
$(F-G)' = f - f = 0$ auf I. Mit Mittelwertsatz folgt: $F - G$ konstant.

15.6 Hauptsatz der Differential- & Integralrechnung (HDI)

Sei f aus $C^0([a,b],\mathbb{R})$ und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int_0^x f(t)dt$.

Dann ist F Stammfunktion zu f und für jede Stammf. $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ zu f gilt: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ (Schreibweise $[G(x)]_a^b$)

Beweis:



Sei $x_0 \in [a,b]$ und $\varepsilon > 0$ ($|F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)| < \varepsilon |x - x_0|$)
Da f stetig bei x_0 ex. $\delta > 0$ mit $\forall x \in [a,b]$, $|x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Für solche x ist $|F(x) - F(x_0) - f(x_0)(x - x_0)| = |\int_0^x f(t)dt - \int_0^{x_0} f(t)dt - f(x_0)(x - x_0)| = |\int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^x f(x_0)dt| = |\int_{x_0}^x f(t) - f(x_0)dt| \leq |\int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|dt| \leq |\int_{x_0}^x \varepsilon dt| = \varepsilon |x - x_0|$.
Also: $F'(x_0) ex. = f(x_0)$. Weiter: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - \underbrace{F(a)}_{=0} = G(b) - G(a)$ (Für jede andere Stammfunktion)

Physikalischer „Beweis“:

$dF = f(x_0)dx + \Delta$ (ignoriert)$\Rightarrow \frac{dF}{dx} = f(x_0)$.
Genauer: $\Delta F = \Delta x \cdot f(x_0) + \Delta$ (Klein gegenüber Δx im Sinne von $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta F}{\Delta x} = f(x_0) + \underbrace{\Delta x}_{\Delta x \to 0}$

15.7 Weitere Integrationsregeln

a) Sei $f \in \mathbb{C}^0([a,b],\mathbb{R}), g \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion zu f.

Dann $\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$ (Partielle Integration)

b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ st. diffbar.

Dann ist $\int_c^d f(\varphi(u))\varphi(u) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$ (Substitution)

Formal: $x = \varphi(u), dx = \varphi'(u)du$

Beweis:

a) $(Fg)' = fg + +Fg'$, Integration über $[a,b]$ ergibt $[Fg]_a^b = \int_a^b fg + \int_a^b Fg'$

Daraus folgt Behauptung.

b) $(F \circ \varphi)'(u) = f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)(u \in [c,d])$.

Integration über $[c,d] : [F \circ \varphi]_c^d = \int_c^d f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)du$

$[F \circ \varphi]_c^d = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = [F]_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)dx$

Bemerkung:

Falls u, v in $C^1([a,b],\mathbb{R})$ und $[u \cdot v]_a^b = 0$ (z.B. falls $u(a) = u(b) = 0$), so ist $\int_a^b u'(x)v(x)dx = \underbrace{[u(x)v(x)]_a^b}_{0} - \int_a^b u(x)v'(x)dx$,

also $\int_a^b u'(x)v(x)dx = -\int_a^b u(x)v'(x)dx$

(Überwälzen der Differentiation gibt Minuszeichen)

15.8 Satz: Vertauschung Integral und limes

Sei $f_n \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, $f_n \to f$ glm auf $[a,b]$, dann $\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b(x)dx$

Dann nach Weierstraß $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$.

Beweis:

zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \forall x \in [a,b] : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Für $n \geq N : |\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a}} dx \leq \varepsilon$

15.9 Folgerung

$f_n \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, $f_n \to f$ glm auf $[a,b]$. Weiter f_n' konv. glm auf $[a,b]$ gegen $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ (Dann φ stetig nach Weierstraß).

Dann auch $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, $f' = \varphi$ $(= \lim\limits_{n\to\infty} f_n')$

Beweis:

$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt \Rightarrow f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)dt$ (15.8)

mit HDI: f diffbar, $f'(x) = \varphi(x)$