6 Übungen zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, den 24.11.2009

6.1

a) Induktionsvorraussetzung:

n=1:

$\sum_{k=1}^{1} k = 1$ (links)

$\frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$ (rechts)

Induktion:

$n \to n+1$:

$\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1)$

per Induktion folgt: $= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(2n+2)+n(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

b) Induktionsvorraussetzung:

n=1:

$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1$ (links)

$\left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2 = (1)^2 = 1$ (rechts)

Induktion:

$n \to n+1$:

$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3$

Per Induktion folgt: $\left(\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2\right) + (n+1)^3 = \left(\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2\right) + \left(\sum_{k=n+1}^{n+1} k^3\right)$

Per erneuter Induktion folgt: $= \left(\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2\right) + \left(\left(\sum_{k=n+1}^{n+1} k\right)^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$

6.2

Sei b_k Teilfolge von $a_n = a_{nk}$ mit $n_1 < n_2 < n_3 ...$

Nach Vorraussetzung gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \varepsilon \forall n \geq n_0$. Es gibt also ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_k > n_0$ für alle $k \geq k_0$.

Daher gilt $|a - b_k| = |a - a_{nk}| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$. Wenn jede Teilfolge von a_n nun gegen a konvergiert, dann konvergiert a_n auch als Teilfolge von sich selbst gegen a.

6.3

Nullfolge $(a_k) := \frac{1+k}{k^2}$ (Kontrolle: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1+k}{k^2} = 0$)

Divergente Folge $(b_k) := 2k$ (Kontrolle: $\lim\limits_{k\to\infty} 2k = \infty$)

$(a_k)\cdot(b_k) = \frac{2k(1+k)}{k^2} = \frac{2k+2k^2}{k^2} = \frac{2}{k} + 2$ (Kontrolle: $\lim\limits_{k\to\infty} (\frac{2}{k} + 2) = 2$)

6.4

Anfangsbedingungen:

$M \subset \mathbb{R}, \; M \neq \emptyset$, M nach oben beschränkt.

Es existiert das Supremum einer nach oben beschränkten Menge, also

$supM \geq m \quad \forall m \in M.$

Für $\varepsilon > 0$ gilt $supM - \varepsilon < supM$. Es gilt also nun

$\exists m \in M: \; supM - \varepsilon < m \leq supM.$

Man wähle nun eine Folge, z.B.: $x_n := supM - \frac{1}{n}$ für $supM - \frac{1}{n} \in M$, da nicht alle x_n in M vorkommen müssen damit dies in unserem Fall erfüllt ist.

folglich kann (x_n) als Teilfolge von (an) auffassen, sodass gilt

$\forall n \in \mathbb{N} : n - teFolgeglied \in R.$

Da nun für den Grenzwert nach Archimedes gilt, dass für $\frac{1}{n} > \varepsilon$ mit $\forall \varepsilon > 0$ ein n existiert, ist $\lim\limits_{n \to \infty} supM - \frac{1}{n} = supM - 0 = supM.$

Somit gibt es eine Folge $(x_n) \subset (a_n)$ mit dem Grenzwert sup M.

6.5

$$\begin{aligned} ix - 4y &= 1 \\ 3x + iy &= 2 + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 + 4y}{i} \\ 3 \cdot \frac{1 + 4y}{i} + iy &= 2 + i \\ 3 + 12y - y &= 2i - 1 \\ y &= -\frac{4}{11} + \frac{2i}{11} \end{aligned}$$

$$x = \frac{1 + 4 \cdot (-\frac{4}{11} + \frac{2i}{11})}{i} = -i + \frac{16}{11}i + \frac{8}{11} = \frac{8}{11} + \frac{5}{11}i$$

$$\begin{aligned} \Im_x &= \frac{5}{11}; \; \Re_x = \frac{8}{11} \\ \Im_y &= \frac{2}{11}; \; \Re_y = -\frac{4}{11} \end{aligned}$$

6.6

a)

$$\lambda \cdot \vec{x} + \delta \cdot \vec{y} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} 0\lambda + 3\delta &= 0 \\ 2\lambda + 1\delta &= 0 \\ 0\lambda + 1\delta &= 0 \\ 0\lambda + 0\delta &= 0 \\ -1\lambda + (-2\delta) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 + \delta = 0 &\Rightarrow \delta = 0 \\ 2\lambda + \delta = 0 &\Rightarrow \lambda = 0 \end{aligned}$$

Da nur die triviale Lösung möglich ist, sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ linear unabhängig voneinaner.

b) Man ersetze $\vec{e_1}$ durch y und $\vec{e_2}$ durch x, also i=2 und j=1.

Beweis der Bildung einer Basis (Basisvektoren sind linear unabhängig).

$$\begin{aligned} 3x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 0 \\ 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 &= 0 \\ -2x_1 - 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 = 0 \Rightarrow x_1 &= 0 \\ 4x_1 + 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_2 &= 0 \\ 0 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 &= 0 \\ x_4 &= 0 \text{ (nach IV)} \\ -2 \cdot 0 - 0 + x_5 = 0 \Rightarrow x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Da hier nur die triviale Lösung möglich ist, sind die erzeugten Einheitsvektoren eine Basis (linear unabhängig).

6.7

a) B= $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

B'= $\begin{matrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

Da det B' =1 (also ungleich 0), ist die Matrix linear unabhängig. Da man es auch in der Form $ax^2 + bx + c$ $(x^2 - 1)$ ist es Erzeugendensystem und somit insgesamt Basis.

b) $M_{B'}^{B}(id_V) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$M_{B'}^{B}(id_V) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$M_{B'}^{B}(id_V) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_{B'}^{B}(id_V) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $M_{B'}^{B}(D) = M_{B'}^{B}(id_V \circ D) = M_{B'}^{B}(id_V) \cdot M_{B}^{B}(D)$

$M_{B}^{B}(D) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M_{B'}^{B}(id_V) \cdot M_{B}^{B}(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$