

$\sigma(H_j)$: EW v. H_j bestimmen: $H_j = D^{-1}(L+R)$

$$\Rightarrow 0 \doteq \left| D^{-1}(L+R) - \lambda \mathbb{1} \right| = \left| \underbrace{D^{-1/2} D^{-1/2}}_{= D^{-1}} (L+R) \underbrace{D^{1/2} D^{1/2}}_{= \mathbb{1}} - \lambda \mathbb{1} \right|$$

$$\tilde{H}_j = \mathbb{1}^{-1}(\tilde{L} + \tilde{R}) = \tilde{L} + \tilde{R} = D^{1/2} L D^{-1/2} + D^{-1/2} R D^{1/2} = D^{-1/2} (L+R) D^{1/2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 \doteq \left| D^{-1/2} D^{-1/2} (L+R) D^{1/2} D^{1/2} - \lambda \mathbb{1} \right| &= \left| D^{-1/2} (\tilde{L} + \tilde{R}) D^{1/2} - \lambda \mathbb{1} \right| \\ &= \left| D^{1/2} ((\tilde{L} + \tilde{R}) D^{1/2} - \lambda D^{1/2} \mathbb{1}) \right| \\ &= \left| D^{-1/2} ((\tilde{L} + \tilde{R}) D^{1/2} - \lambda \mathbb{1} D^{1/2}) \right| = \left| D^{-1/2} ((\tilde{L} + \tilde{R}) - \lambda \mathbb{1}) D^{1/2} \right| \\ &= \left| \tilde{L} + \tilde{R} - \lambda \mathbb{1} \right| \end{aligned}$$

Satz: $\det(C^{-1}AC) = \det(A) \Rightarrow \dots = \left| \tilde{L} + \tilde{R} - \lambda \mathbb{1} \right|$
 $\Rightarrow$ gleichen EW wie $\tilde{H}_j \Rightarrow \sigma(H_j) = \sigma(\tilde{H}_j)$

$$H_{\text{SOR}} = (D - \omega L)^{-1} ((1-\omega)D + \omega R), \quad \tilde{H}_{\text{SOR}} = (\mathbb{1} - \omega \tilde{L})^{-1} ((1-\omega)\mathbb{1} + \omega \tilde{R})$$

$$\tilde{H}_{\text{SOR}} = (\mathbb{1} - \omega D^{1/2} L D^{-1/2})^{-1} ((1-\omega)\mathbb{1} + \omega D^{-1/2} R D^{1/2})$$

$$= (D^{-1/2} (D^{1/2} - \omega L D^{1/2}))^{-1} ((1-\omega) D^{-1/2} (D^{1/2} + \omega R D^{1/2}))$$

$$= (D^{-1/2} (D - \omega L) D^{1/2})^{-1} ((1-\omega) D^{-1/2} (D + \omega R) D^{1/2})$$

$$\text{EW v. } \tilde{H}_{\text{SOR}}: 0 \doteq \left| (D^{-1/2} (D - \omega L) D^{1/2})^{-1} ((1-\omega) D^{-1/2} (D + \omega R) D^{1/2}) - \lambda \mathbb{1} \right|$$

$$= \left| (D^{-1/2})^{-1} (D - \omega L)^{-1} (1-\omega) (D + \omega R) D^{-1/2} - \lambda \mathbb{1} \right|$$

$$= \left| (D^{-1/2})^{-1} ((D - \omega L)^{-1} (1-\omega) (D + \omega R) D^{1/2} - (D^{-1/2})^{-1} (D^{1/2}) \lambda \right|$$

$$= \left| (D - \omega L)^{-1} (1-\omega) (D + \omega R) - \lambda \mathbb{1} \right|$$

$\Rightarrow$ gleichen EW wie $H_{\text{SOR}}! \Rightarrow \sigma(H_{\text{SOR}}) = \sigma(\tilde{H}_{\text{SOR}})$

Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Jacobi: } L = D^{-1}(L_0 + R_0)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -t & -t \\ -t & 0 & -t \\ -t & -t & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -t & -t \\ -t & 0 & -t \\ -t & -t & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte sind:

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -t & -t \\ -t & \lambda - 1 & -t \\ -t & -t & \lambda - 1 \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 2t^3 + 3t^2\lambda \quad \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = \{t, t, -2t\}$$

$$\rho(L) = |\text{betr. grÖßt EW}| = 2t$$

$$t \in (0, 5, 1) \Rightarrow \rho \in (1, 2) > 1 \Rightarrow \text{divergiert.}$$

$$\text{Gauß-Seidel: } \bar{L} = (D - L_0)^{-1} R_0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ t & t & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -t & -t \\ 0 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ t^2 - t & -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t & -t \\ 0 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -t & -t \\ 0 & t^2 & t^2 - t \\ 0 & t^2 - t^3 & 2t^2 - t^3 \end{pmatrix}$$

EW sind:

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & -t & -t \\ 0 & t^2 - \lambda & t^2 - t \\ 0 & t^2 - t^3 & 2t^2 - t^3 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 t^2 - \lambda t^3 - \lambda^2 t^3$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{4t^2} (t-1) t^{3/2} + 3t^2 - t^3 \right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4t^2} (t-1) t^{3/2} + 3t^2 - t^3 \right)$$

da $t \in (0, 1)$ kehrt (t-1) Vorzeichen im Summanden um

$$t \in (0, 5, 1)$$

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{4t^2} (1-t) t^{3/2} + 3t^2 - t^3 \right) = 2t^2 - t^3 \leq 2t - t \leq t$$

$$\Rightarrow \rho(\bar{L}) \leq t \quad \text{für } t \in (0, 5, 1) \Rightarrow \rho < 1$$

* : Mathematica: $-\lambda^3 + 3\lambda^2 t^2 - \lambda t^3 - \lambda^2 t^3 = 0$ // solve
Wahlweise Taschenrechner wenn graphisch

Aufgabe 3

a) Man teile P entsprechend auf:

$$P = \underbrace{(D-R^T)}_{(\Delta)} \underbrace{D^{-\frac{1}{2}} D^{-\frac{1}{2}}}_{D^{-1}} \underbrace{(D-R)}_{(\nabla)} \stackrel{?}{=} L L^T$$

$$\underbrace{(\Delta)}_{(\Delta)} \underbrace{(\nabla)}_{(\nabla)} \in \text{da } R(\nabla) \text{ ist } R^T(\Delta) \text{ und da } D(\nabla) \text{ ist } D-R(\nabla) \text{ bzw. } D-R^T(\Delta).$$

Test: $L \stackrel{!}{=} (D-R^T) D^{-\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow L^T = (D^{-\frac{1}{2}})^T (D^T - R) \in D = (\nabla) \Leftrightarrow D^T = (\nabla) = D$$

$$= D^{-\frac{1}{2}} (D - R)$$

entspricht dem 2. Teil!

Damit existiert per Definition eine Cholesky-Zerlegung mit $L = (D-R^T) D^{-\frac{1}{2}}$ und $L^T = D^{-\frac{1}{2}} (D-R)$

Ansonsten zu überprüfen: A sym & pos def.

$$|(D-R^T) D^{-1} (D-R)| \stackrel{\text{Def.}}{\geq} 0 \quad \uparrow \text{EW} \geq 0$$

$$= |D-R^T| \cdot |D^{-1}| \cdot |D-R|$$

$$= |D^T - R| \cdot |D|^{-1} \cdot |D-R| = |D-R|^2 \cdot |D|^{-1}$$

$$\stackrel{=0, \text{ s.o.}}{\geq} 0$$

Da $\text{Spur}(A) \geq 0$ (Def.) ist $|D|^{-1} \geq 0 \Rightarrow |D-R|^2 |D|^{-1} \geq 0$

Da weiterhin hier nur Dreieck & Diagonalmatrizen beteiligt sind, gilt diese Formel auch für alle Untermatrizen mit resp. R_i und D_i ($\begin{pmatrix} - & * \\ * & * \end{pmatrix}$).

Da die Determinante aller Untermatrizen pos. ist, ist die Matrix pos. def.

$\Rightarrow$ Cholesky-Zerlegung ex.

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq b < 1, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^{-1} A L^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2b \\ -b & 1+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2b \\ 0 & 1+b^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{cond}_2(B) = \frac{|\lambda_{\max}(B)|}{|\lambda_{\min}(B)|}$$

$$\text{cond}_2(A) \stackrel{!}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -b \\ -b & 1-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0 = (1-\lambda)^2 - b^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm b$$

$$\Rightarrow \text{cond}_2(A) = \frac{1+b}{1-b} \quad \text{mit } b \geq 0$$

$$\text{cond}_2(L^{-1} A L^T) \stackrel{!}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2b \\ 0 & 1+b^2-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0 = (1+b^2-\lambda)(1-\lambda) = \lambda^2 + \lambda(b^2-2) + 1-b^2$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1-b^2)}}{2} = 1 \pm b^2$$

$$\Rightarrow \text{cond}_2(L^{-1} A L^T) = \frac{1}{1-b^2} \quad \text{mit } b \geq 0$$

$$\text{z.z.: } \text{cond}_2(L^{-1} A L^T) = \frac{1}{1-b^2} < \frac{1+b}{1-b} = \text{cond}_2(A) \quad \text{mit } b > 0$$

$$\text{Ist } A = \mathbb{1} = L, \text{ dann ist } b = 0, \text{ also } \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{1-b^2} \stackrel{b \geq 0}{\leq} \frac{1+b}{1-b} \stackrel{b \geq 0}{\leq} \frac{1+b}{1-b^2} \leq \frac{1+b}{1-b} = \text{cond}_2(A)$$

$$1-b^2 \geq 1-b \quad \text{mit } b \in [0, 1]$$

$$\text{Also } \text{cond}_2(L^{-1} A L^T) < \text{cond}_2(A) \quad \text{für } A \neq \mathbb{1} \neq L,$$

$$\text{sonst } \quad \quad \quad = \quad \quad \quad$$