

Aufgabe 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \alpha \in (-1, 1),$$

$$\tilde{L}_w = (D - L_0 W)^{-1} ((1-w)D + wR_0)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} w \right)^{-1} \left((1-w) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-w & -\alpha w \\ 0 & 1-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-w & -\alpha w \\ -\alpha w + \alpha w^2 & \alpha^2 w^2 + 1-w \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-w-\lambda & -\alpha w \\ -\alpha w + \alpha w^2 & \alpha^2 w^2 + 1-w-\lambda \end{vmatrix} = (1-w-\lambda)(\alpha^2 w^2 + 1-w-\lambda) - \alpha w(\alpha w - \alpha w^2) \\ = \alpha^2 w^2 + 1-w-\lambda - \alpha^2 w^3 - w + w^2 + \lambda w - \alpha^2 w^2 \lambda \\ - \lambda + w\lambda + \lambda^2 = \alpha^2 w^2 + \alpha^2 w^3 - \lambda^2$$

$$= w^2 - 2w + 1 + (2w - 2 - \alpha^2 w^2)\lambda + \lambda^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \alpha^2 w^2 + 1-w \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \alpha^2 w^2 + 1-w\right)^2 - w^2 + 2w + 1} \\ = \frac{1}{2} \alpha^2 w^2 + 1-w \pm \sqrt{\frac{1}{4} \alpha^4 w^4 + \frac{1}{2} \alpha^2 w^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 w^3 + \frac{1}{2} \alpha^2 w^2 + 1-w - \frac{1}{2} \alpha^2 w^3} \\ = \frac{1}{2} \alpha^2 w^2 + 1-w \pm \sqrt{\frac{1}{4} \alpha^4 w^4 + \alpha^2 w^2 - \alpha^2 w^3}$$

$$|\lambda_{1,2}| = \left| \frac{1}{2} \alpha^2 w^2 + 1-w \pm \sqrt{\frac{1}{4} \alpha^4 w^4 + \alpha^2 w^2 - \alpha^2 w^3} \right| \quad (\leq 1)$$

$$\leq \left| \frac{1}{2} w^2 + 1-w \right| + \left| \sqrt{\frac{1}{4} w^4 + w^2 - w^3} \right|$$

da $|a \pm b| \leq |a| + |b|$ und $\alpha^2 \leq 1$

$$= \left| \frac{1}{2}(w-1) + \frac{1}{2} \right| + \left| \sqrt{\left(\frac{1}{2}w^2 - w\right)^2} \right| = \left| \frac{1}{2}(w-1) + \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{2}(w-1) - \frac{1}{2} \right|$$

Im Fall + von $\pm$ gilt: $|\lambda_{1,2}| \leq \left| \frac{1}{2}(w-1) + \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{2}(w-1) - \frac{1}{2} \right| = |(w-1)^2|$

Für Konvergenz muss gelten: $|\lambda_{1,2}| \leq 1$

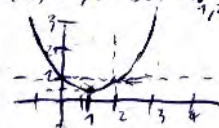
$\Rightarrow (w-1)^2$ ist Parabel mit $|\lambda_{1,2}| = 1$ bei $w_1 = 0, w_2 = 2$

$\Rightarrow w$ muss zwischen 0 und 2 liegen.

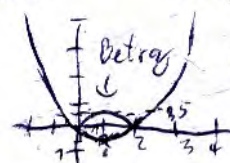
Im Fall - gilt nicht mehr zwangsläufig, dass $|a \pm b| \leq |a-b|$, daher hier zu betrachten:

$$|\lambda_{1,2}| \leq \left| \frac{1}{2}(w-1) + \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{2}(w-1) - \frac{1}{2} \right|$$

Parabel $\frac{1}{2}$ nach oben versch. mit $f(w) = 1,5$ bei $w_{1,2} = 2, 0$



Parabel $\frac{1}{2}$ nach unten versch. mit $f(w) = 0$ bei $w_{1,2} = 2, 0$



Im Bereich von $0 \leq w \leq 2$ ist Parabel $z = 1 - \text{Par. 1!}$ $\Rightarrow p_1 + p_2 = 1$, sonst ist $p_1 > 0$ und $p_2 > 1$, also $p_1 + p_2 > 1$!

$\Rightarrow$ Konvergenz nur wenn $w \in (0, 2)$!

Aufgabe 2

$$K = \{(k, l) \mid k \neq l \wedge k, l \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k, l \leq n \wedge a_{kl} \neq 0\}$$

für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow K = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

$$\Rightarrow j = (1, 2, 3, 4)$$

Prüfung: $(j_2 - j_1) = 1$, $(j_3 - j_2) = 1$, $(j_4 - j_3) = 1$
 $\Rightarrow j$ kompatibler Ordnungsvektor von A .

$$w_{\text{opt}} = \frac{2(1 - \sqrt{1 - \bar{\mu}^2})}{\bar{\mu}^2} \quad \text{mit } \bar{\mu} = s(B)$$

und B Iterationsmatrix d. Jacobi-Verfahrens

$$B = D^{-1}(D - A) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{EW: } \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda^2}{2} - \frac{1}{8} \right) - \lambda \left(-\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda \right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$= \lambda^4 - \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{16} =: z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} - \frac{1}{16}} = \frac{1}{8}(3 \pm \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{8}(3 \pm \sqrt{5})}, \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{1}{8}(3 - \sqrt{5})}$$

$$\Rightarrow \bar{\mu} = s(B) = \lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{8}(3 + \sqrt{5})} = 0,65408$$

$$\Rightarrow w_{\text{opt}} = \frac{2(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{8}(3 + \sqrt{5})})}{\left(\frac{1}{8}(3 + \sqrt{5})\right)} = 1,25962$$

$$\tilde{L}_{w_{\text{opt}}} = (D - w_{\text{opt}} A)^{-1} ((1 - w_{\text{opt}}) D + w_{\text{opt}} R_0)$$

Außerdem, da ~~es~~ kompatibler Ordnungsvektor vorhanden:

$$s(\tilde{L}_{w_{\text{opt}}}) = w_{\text{opt}} - 1 = 0,25962$$

Aufgabe 3

$$a) \tilde{L}_w = (D - wL_0)^{-1} ((1-w)D + wR_0)$$

$$|\tilde{L}_w| = \underbrace{|D - wL_0|^{-1}}_{\text{untere Dreiecksmatrix}} \cdot \underbrace{|(1-w)D + wR_0|}_{\text{obere Dreiecksmatrix}}$$

Det. einer Dreiecksmatrix = Produkt d. Hauptdiag.!

$$\Rightarrow |\tilde{L}_w| = \left(\prod_{i=1}^n D_{ii} \right)^{-1} \cdot \left(\prod_{i=1}^n (1-w) D_{ii} \right) = (1-w)^n \prod_{i=1}^n \frac{D_{ii}}{D_{ii}} = (1-w)^n$$

$$b) B^2 = \left(\underbrace{\mathbb{1}}_D^{-1} (L_0 + R_0) \right)^2 = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & \overset{q}{*} & \overset{q}{*} \\ 0 & 0 & 0 & \overset{q}{*} & \overset{q}{*} \\ 0 & 0 & 0 & \overset{q}{*} & \overset{q}{*} \\ \hline * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \end{array} \right)^2 = \begin{pmatrix} C^T C & 0 \\ 0 & C C^T \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w^2 (D^{-1} (L_0 + R_0))^2 ((D - wL_0)^{-1} ((1-w)D + wR_0)) &= w^2 B^2 \tilde{L}_w \\ &= w^2 \begin{pmatrix} C^T C & 0 \\ 0 & C C^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-w)\mathbb{1} & C^T w \\ C(1-w) & (1-w)\mathbb{1} + C C^T w^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C^T C (1-w)\mathbb{1} w^2 & C^T C C^T w^3 \\ C C^T C (1-w) w^2 & C C^T \mathbb{1} w^2 (1-w) + C C^T C C^T w^4 \end{pmatrix} \\ &= \text{rechte Seite} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (L_w^2 + (w-1)\mathbb{1})^2 &= ((D - wL_0)^{-1} ((1-w)D + wR_0))^{-1} ((1-w)\mathbb{1})^2 \\ &= \left(\begin{pmatrix} (1-w)\mathbb{1} & C^T w \\ C(1-w) & (1-w)\mathbb{1} + C C^T w^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (1-w)\mathbb{1} & 0 \\ 0 & (1-w)\mathbb{1} \end{pmatrix} \right)^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & C^T w \\ C(1-w) & C C^T w^2 \end{pmatrix}^2 \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} C^T C w (1-w) & C^T w C C^T w^2 \\ C C^T w^2 C (1-w) & C (1-w) C^T w + C C^T w^2 C C^T w^2 \end{pmatrix}$$

= linke Seite

= rechte Seite (siehe oben)

$$\Rightarrow w^2 B^2 \tilde{L}_w = (\tilde{L}_w + (w-1)\mathbb{1})^2 !$$