

NUMERIK II IM SOMMERSEMESTER 2013

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $A = D - L - R$ eine Matrix mit positiven Diagonalelementen a_{ii} , $i = 1, \dots, n$, und $\tilde{A} = D^{-1/2}AD^{-1/2} = I - \tilde{L} - \tilde{R}$ die zugehörige skalierte Matrix mit Diagonalelementen $\tilde{a}_{ii} = 1$. Man zeige, dass die Spektren des Jacobi-Verfahrens (H_J) und SOR-Methode (H_{SOR}) durch die Skalierung nicht beeinflusst werden, so dass gelten

$$\sigma(H_J) = \sigma(\tilde{H}_J), \quad \sigma(H_{SOR}(\omega)) = \sigma(\tilde{H}_{SOR}(\omega)).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & t \\ t & t & 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit } t \in (0.5, 1).$$

Zeigen Sie, dass das Jacobi-Verfahren divergiert und das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Sei A symmetrisch. Das *symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren* ist definiert durch

$$P = (D - R^T)D^{-1}(D - R) \quad \text{und} \quad N = R^T D^{-1} R.$$

- (a) Zeigen Sie, dass es eine Cholesky-Zerlegung $P = LL^T$ von P gibt und geben Sie L an.
- (b) Zeigen Sie, dass für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq b < 1, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}.$$

gilt:

$$\text{cond}_2(L^{-1}AL^{-T}) \leq \text{cond}_2(A),$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, falls $A = I = L$ ist.

1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 7 19.6.12

1.1 Aufgabe 1

Für die Matrizen des Jacobi- und des SOR-Verfahrens gilt:

$$A = D - L - R$$

$$H_J = D^{-1}(L + R) \quad H_{SOR} = (D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega R)$$

sowie f.d. skalierte Matrix $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = I - \tilde{L} - \tilde{R}$$

$$\tilde{H}_J = (\tilde{L} + \tilde{R}) \quad \tilde{H}_{Sor} = (I - \omega \tilde{L})^{-1}((1 - \omega)I + \omega \tilde{R})$$

$$\text{mit } \tilde{L} = D^{-1/2}LD^{-1/2} \text{ und } \tilde{R} = D^{-1/2}RD^{-1/2}$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ Jacobi } \det(H_J - \lambda I) &= \det(D^{-1}(L + R) - \lambda I) \\ &= \det(D^{-1/2}D^{-1/2}(L + R)D^{-1/2}D^{1/2} - D^{-1/2}D^{1/2}\lambda D^{-1/2}D^{1/2}) \\ &= \det(D^{-1/2}) \det(D^{-1/2}(L + R)D^{-1/2} - D^{-1/2}\lambda D^{-1/2}) \det(D^{1/2}) \\ &= \det(I(\tilde{L} + \tilde{R}) - \lambda I) \\ &= \det(\tilde{H}_J - \lambda I) \end{aligned}$$

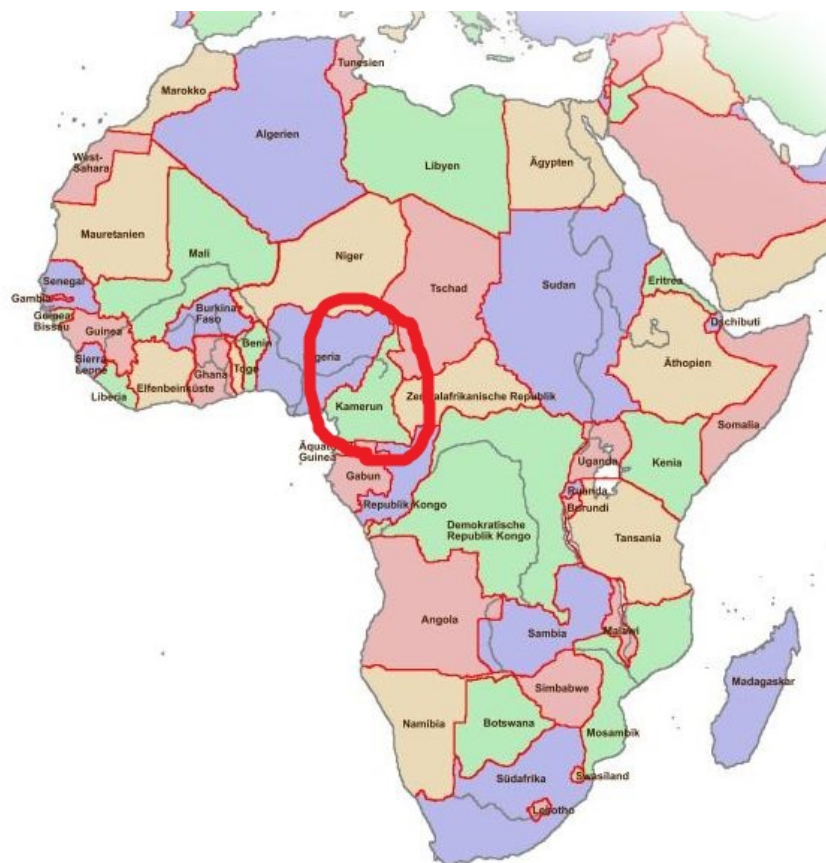
$$\Rightarrow \sigma(H_J) = \sigma(\tilde{H}_J)$$

2. SOR Sei $\lambda \in \sigma(\tilde{H}_{SOR})$. Dann gibt es $\nu \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\begin{aligned} \det(H_{SOR} - \lambda I) &= \det((D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega R) - \lambda I) \\ &= \det((D^{1/2}D^{1/2} - \omega D^{1/2}\tilde{L}D^{1/2})^{-1}((1 - \omega)D^{1/2}D^{1/2} \\ &\quad + \omega D^{1/2}\tilde{R}D^{1/2}) - \lambda D^{-1/2}D^{1/2}) \\ &= \det(D^{-1/2}(I - \omega \tilde{L})^{-1}D^{-1/2}D^{1/2}((1 - \omega)I + \omega \tilde{R})D^{1/2} - \lambda D^{-1/2}D^{1/2}) \\ &= \det(D^{-1/2}) \det((I - \omega \tilde{L})^{-1}((1 - \omega)I + \omega \tilde{R}) - \lambda I) \det(D^{1/2}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma(H_{SOR}) = \sigma(\tilde{H}_{SOR})$$

1.2 Aufgabe 2



Zeige Divergenz des Jacobi-Verfahrens, indem wir zeigen $\rho(B) \geq 1$. Mit Matrix A ergibt sich:

$$B = H = - \begin{bmatrix} 0 & t & t \\ t & 0 & t \\ t & t & 0 \end{bmatrix}$$

$$\chi(B) = -\lambda(\lambda^2 - t^2) + 2t(t\lambda - t^2) = -(t - \lambda^2)(2t + \lambda)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = t \Rightarrow \lambda_{1,2} \leq t \text{ und } \lambda_3 = -2t \Rightarrow |\lambda_3| \geq 1$$

$$\Rightarrow \rho(B) \geq 1$$

Zeige konv. von Gauß-Seidel mit $\rho(\tilde{L}) < 1$

$$D - L_0 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ t & 1 & \\ t & t & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (D - L_0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -t & 1 & \\ t^2 - t & -t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{L} = H = (D - L_0)^{-1}R = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -t & 1 & \\ t^2 - t & -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t & -t \\ 0 & -t & \\ -t & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t & -t \\ 0 & t^2 & t^2 - t \\ 0 & -t^3 + t^2 & -t^3 + t^2 \end{pmatrix}$$

$$\chi(H) = \dots = -\lambda(\lambda^2 + \lambda(t^3 - 3t^2) + t^3)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{t^3 - 3t^2}{2} + \sqrt{\frac{(t^3 - 3t^2)^2}{4} - t^3}$$

$$\lambda_3 = -\frac{t^3 - 3t^2}{2} - \sqrt{\frac{(t^3 - 3t^2)^2}{4} - t^3}$$

Nach Voraussetzung $\frac{1}{2} < t < 1$ gilt:

$$\frac{(t^3-3t^2)^2}{4} - t^3 < 0$$

d.h. $\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$ und es gilt:

$$\begin{aligned} |\lambda_2|^2 &= |\lambda_3|^2 = \left(-\frac{t^3-3t^2}{2} + i\sqrt{\frac{(t^3-3t^2)^2}{4} - t^3}\right)(\dots - i\sqrt{\dots}) \\ &= \frac{(t^3-3t^2)^2}{4} - t^3 - \frac{(t^3-3t^2)^2}{4} = -t^3 < 1 \end{aligned}$$

1.3 Aufgabe 3

a) Z.Z. P symm. und pos definit.

$$- P^T = (D - R)^T D^{-1} (D - R^T)^T = (D - R^T) D^{-1} (D - R) = P \Rightarrow P \text{ symmetrisch}$$

$$\begin{aligned} - \text{Gilt: } x^T R^T D^{-1} R x &= x R^T D^{-1/2} D^{-1/2} R x = x (D^{-1/2} R)^T (D^{-1/2} R) x > 0 \\ &\Leftrightarrow D > 0 \text{ komponentenweise} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Folgt: } x^R P x &= x^T (D - R^T) D^{-1} (D - R) x \\ &= x^T (D D^{-1}) x - x^T (D D^{-1} R) x - x^T R^T D^{-1} D x + x^T R^T D^{-1} R x \\ &= x^T (D - R - R^T) x + x R^T D^{-1} R x \\ &= x^T A x + x R^T D^{-1} R x > 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow A$ pos definit.

Die Cholesky-Zerlegung ergibt sich aus $L = (D - R^T) D^{-1/2}$

$$\begin{aligned} P &= L L^T = (D - R^T) D^{-1/2} ((D - R^T) D^{-1/2})^T \\ &= (D - R^T) D^{-1/2} D^{-1/2} (D - R) \\ &= (D - R^T) D^{-1} (D - R) \end{aligned}$$

b) A symm. und damit auch $L^{-1} A L^{-T}$ d.h. es genügt nach Numerik 1, die EW von A bzw. $L^{-1} A L^{-T}$ zu betrachten, da $\text{cond}_2(A) = \frac{\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|}{\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|}$

Zunächst für $L^{-1} A L^{-T}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ -b & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L^{-1} A L^{-T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b & -b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - b^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma(L^{-1} A L^{-T}) = \{1, 1 - b^2\}$$

$$\Rightarrow \text{cond}_2(L^{-1} A L^{-T}) = \frac{1}{1 - b^2}$$

Für A folgt:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -b \\ -b & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - b^2 = \lambda^2 - 2\lambda - b^2 + 1$$

Nullstellen: $\lambda_{1,2} = 1 \pm b$, also:

$$\text{cond}_2(A) = \frac{1+b}{1-b} = \frac{(1+b)^2}{1-b^2}$$

womit Beweis folgt.