Aufgabe 1 Blatt 9 Julian Bergmann

(Numerik 2)

$$x_0 = \left(1,1,1,1,\tfrac{1}{2}\right)^T, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = (1,0,0,0,1)^T$$

Jacobi: $$H = D^{-1}(L+R) = \begin{pmatrix} 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 \\ \frac12 & 0 & \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac12 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ 0 & 0 & 0 & \frac12 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = D^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac12 \end{pmatrix}$$

$$x_{i+1} = Hx_i + c$$

$$x_1 = Hx_0 + c = \left(\tfrac12, 1, 1, \tfrac34, \tfrac12\right)^T + \left(\tfrac12, 0, 0, 0, \tfrac12\right)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac34 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = Hx_1 + c = \begin{pmatrix} \frac12 \\ 1 \\ \frac78 \\ 1 \\ \frac38 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac78 \\ 1 \\ \frac78 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = Hx_2 + c = \left(\tfrac12, \tfrac{15}{16}, 1, \tfrac78, \tfrac12\right)^T + \left(\tfrac12, 0, 0, 0, \tfrac12\right)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{15}{16} \\ 1 \\ \frac78 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = Hx_3 + c = \left(\tfrac{15}{32}, 1, \tfrac{29}{32}, 1, \tfrac{7}{16}\right)^T + \left(\tfrac12, 0, 0, 0, \tfrac12\right) = \left(\tfrac{31}{32}, 1, \tfrac{29}{32}, 1, \tfrac{15}{16}\right)$$

$$x_5 = Hx_4 + c = \left(\tfrac12, \tfrac{15}{16}, 1, \tfrac{59}{64}, \tfrac12\right)^T + \left(\tfrac12, 0, 0, 0, \tfrac12\right)^T = \left(1, \tfrac{15}{16}, 1, \tfrac{59}{64}, 1\right)^T$$

Gauss-Seidel: $$\tilde{L} = H = (D-L)^{-1}R = \begin{pmatrix} 0 & \frac12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac14 & \frac12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac18 & \frac14 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac1{16} & \frac18 & \frac14 & \frac12 \\ 0 & \frac1{32} & \frac1{16} & \frac18 & \frac14 \end{pmatrix}$$

$$c = (D-L)^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} \frac12 \\ \frac14 \\ \frac18 \\ \frac1{16} \\ \frac{17}{32} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \tilde{L}x_0 + c = \left(1, 1, 1, \tfrac34, \tfrac78\right)^T$$

$$x_2 = \tilde{L}x_1 + c = \left(1, 1, \tfrac78, \tfrac78, \tfrac{15}{16}\right)^T$$

$$x_3 = \tilde{L}x_2 + c = \left(1, \tfrac{15}{16}, \tfrac{29}{32}, \tfrac{59}{64}, \tfrac{123}{128}\right)^T$$

$$x_4 = \tilde{L}x_3 + c = \left(\tfrac{31}{32}, \tfrac{15}{16}, \tfrac{119}{128}, \tfrac{121}{128}, \tfrac{249}{256}\right)^T$$

$$x_5 = \tilde{L}x_4 + c = \left(\tfrac{31}{32}, \tfrac{243}{256}, \tfrac{485}{512}, \tfrac{983}{1024}, \tfrac{2007}{2048}\right)^T$$

Numerik 2 Blatt 9 Julian Bergmann

Aufgabe 2

$$A=\begin{pmatrix}4&-1&0\\-1&4&-1\\0&-1&4\end{pmatrix},\quad \vec b=\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix},\quad \vec x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

a)

$$\vec r^{(0)}=\vec b-A\vec x^{(0)}=\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec d^{(0)}=r^{(0)}=\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix}$$

$$\lambda_0=\frac{(\vec r^{(0)})^T\vec d^{(0)}}{(\vec d^{(0)})^T A\vec d^{(0)}}=\frac{+44}{\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}2\\20\\2\end{pmatrix}}=\frac{+44}{128}=+\frac{11}{32}$$

$$\vec x^{(1)}=\vec x^{(0)}+\lambda_0\vec d^{(0)}=+\frac{11}{32}\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+11/16\\+33/16\\+11/16\end{pmatrix}$$

$$\vec r^{(1)}=\vec r^{(0)}-\lambda_0 A\vec d^{(0)}=\begin{pmatrix}+2\\+6\\+2\end{pmatrix}-\frac{11}{32}\cdot\begin{pmatrix}2\\20\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+21/16\\-7/8\\+21/16\end{pmatrix}$$

$$\vec d^{(1)}=-\vec r^{(1)}-\frac{(\vec r^{(1)})^T A\vec d^{(0)}}{(\vec d^{(0)})^T A\vec d^{(0)}}\vec d^{(0)}=\begin{pmatrix}-21/16\\7/8\\-21/16\end{pmatrix}+\frac{49/4}{128}\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-287/256\\+371/256\\-287/256\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1=\frac{(\vec r^{(1)})^T\vec d^{(1)}}{(\vec d^{(1)})^T A\vec d^{(1)}}=-0{,}168744$$

$$\vec x^{(2)}=(0{,}8767;1{,}8180;0{,}8767)^T,\quad \vec r^{(2)}=\begin{pmatrix}0{,}3112\\0{,}4815\\0{,}3112\end{pmatrix},\quad \vec d^{(2)}=\begin{pmatrix}-0{,}3033\\-0{,}4919\\-0{,}3033\end{pmatrix}$$

(*) Ansonsten, wenn benutzbar, gilt exakte Lösung nach 3 Schritten wg. A dim. 3.

$$\lambda_2=-0{,}3846,\quad \vec x^{(3)}=\begin{pmatrix}0{,}9933\\2{,}0071\\0{,}9933\end{pmatrix},\quad \vec r^{(3)}=\begin{pmatrix}0{,}0339\\-0{,}0418\\0{,}0339\end{pmatrix},\quad \vec d^{(3)}=\begin{pmatrix}-0{,}0317\\0{,}0536\\-0{,}0317\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=-0{,}1837,\quad \vec x^{(4)}=\begin{pmatrix}0{,}9991\\1{,}9988\\0{,}9991\end{pmatrix},\quad \vec r^{(4)}=\begin{pmatrix}0{,}0023\\0{,}0032\\0{,}0023\end{pmatrix},\quad \vec d^{(4)}=\begin{pmatrix}-0{,}0023\\-0{,}0032\\-0{,}0023\end{pmatrix}$$

$$\lambda_4=-0{,}3867,\quad \vec x^{(5)}=\begin{pmatrix}1{,}00001\\1{,}99999\\1{,}00001\end{pmatrix},\quad \vec r^{(5)}=\begin{pmatrix}-0{,}00003\\0{,}00004\\-0{,}00003\end{pmatrix},\quad \vec d^{(5)}=\begin{pmatrix}0{,}00003\\-0{,}00004\\0{,}00003\end{pmatrix}$$

$$\lambda_5=-0{,}1847,\quad \vec x^{(6)}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\quad \vec r^{(6)}=\begin{pmatrix}3\cdot10^{-7}\\4\cdot10^{-7}\\3\cdot10^{-7}\end{pmatrix},\quad \vec d^{(5)}=\begin{pmatrix}-3\cdot10^{-7}\\-4\cdot10^{-7}\\-3\cdot10^{-7}\end{pmatrix}$$

$$\|\vec r^{(6)}\|^2\approx 0 \quad \text{bzw.} \quad \|x^{(6)}-x^{(5)}\|_2=1{,}03\cdot10^{-5}\approx 0$$

$$\Rightarrow \text{Lösung}\quad x=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

b)

$$\operatorname{cond}_2(A)=\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}},$$

EW v. A: $0\overset{!}{=}-(4-\lambda)^3+2(4-\lambda)$

$\Rightarrow \lambda_0=4 \quad \Rightarrow 0\overset{!}{=}-(4-\lambda)^2+2$

$\Rightarrow \lambda_{1,2}=4\pm\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \operatorname{cond}_2(A)=\frac{4+\sqrt2}{4-\sqrt2}=2{,}09384$$

Konvergenzgeschw. mit Fehlerabschätzung:

$$\|\vec e^{(k)}\|_A\le 2\left(\frac{\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}-1}{\sqrt{\operatorname{cond}_2(A)}+1}\right)^k\|\vec e^{(0)}\|_A=2\cdot0{,}1827^k\,\|\vec e^{(0)}\|_A$$

$\Rightarrow$

Angenommen (*) ist benutzbar, dann $k = 3$.

$$\vec{e}^{(0)} = -\sum_{k=0}^{2} \lambda_k \vec{d}^{(k)} = -\frac{11}{32}\begin{pmatrix}2\\6\\2\end{pmatrix} + \frac{176}{1043}\begin{pmatrix}287/256\\-371/256\\287/256\end{pmatrix} + 0{,}3846\begin{pmatrix}-0{,}3033\\-0{,}4719\\-0{,}3033\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-0{,}9933\\-2{,}0071\\-0{,}9933\end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{x}^{(0)} - \vec{x}^{*}$$

$$\|\vec{e}^{(0)}\|_A = (\vec{e}^{(0)})^T A \vec{e}^{(0)}$$

$$= 16{,}032$$

$$\Rightarrow \|\vec{e}^{(3)}\|_A \leq 2 \cdot 0{,}1872^3 \cdot 16{,}032 = 0{,}21035$$

Numerik 2 Blatt 9 Julian Bergmann

Aufgabe 3

Gradientenverfahren quadratischer Funktionale:

$\tilde{d}_k = -\nabla J(x_k) = b - Ax_k$

$\tilde{\alpha}_k = \dfrac{\tilde{d}_k^T \tilde{d}_k}{\tilde{d}_k^T A \tilde{d}_k}$

$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_k + \tilde{\alpha}_k \cdot \tilde{d}_k.$

als Minimierungsproblem $\|Ax - b\|_2^2 \to \min$

Für konj. Grad. des LGS $A^TAx = A^Tb$ gilt

$r^{(0)} = b - Ax^{(0)} \hat{=} \tilde{d}_0$

$d^{(0)} = r^{(0)}$

$\lambda_0 = \dfrac{r^{(0)T} d^{(0)}}{d^{(0)T} A d^{(0)}} \hat{=} \tilde{\alpha}_0$

$x^{(1)} = x^{(0)} + \lambda_0 \vec{d}^{(0)} \hat{=} \tilde{x}_0 + \tilde{\alpha}_0 \tilde{d}_0 = \tilde{x}_1$

$r^{(k+1)} = r^k - \lambda_k A d^{(k)}$

Außerdem gilt: x^* Löst $Ax = b \Leftrightarrow x^*$ löst $A^TAx = A^Tb$

Daher kann das oben genannte Verfahren der konj. Grad. hier angewandt werden. sym & pos def.

d_k wird somit zu $A^Tb - A^TAx^{(k)} = A^T(b - Ax^{(k)})$

Da das CG-Verfahren mit kleiner Norm von d_k abbricht (Residuum gegen 0) $(\|A^T(b - Ax^{(k)})\|_2 \to \min)$, ist es auch hier identisch mit dem Grad.-Verfahren für die Minimierung der Normalengl. $(\|Ax^{(k)} - b\|_2 \to \min)$