

NUMERIK II IM SOMMERSEMESTER 2013

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Berechnen Sie für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in (-1, 1),$$

den Spektralradius von $\tilde{L}_w$. Zeigen Sie aufgrund dieses Ergebnisses, dass das SOR-Verfahren genau dann konvergiert, wenn $w \in (0, 2)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den kompatiblen Ordnungsvektor von A , das optimale $\omega_{opt} \in (0, 2)$ für das SOR-Verfahren sowie den Spektralradius der Matrix $\tilde{L}_\omega$ des Verfahrens für ω_{opt} .

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie die Korrektheit der folgenden Identitäten:

(a) $\det \tilde{L}_\omega = (1 - \omega)^n$ für $\tilde{L}_\omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$

(b) $\left(\tilde{L}_\omega + (\omega - 1) I \right)^2 = \omega^2 B^2 \tilde{L}_\omega$, wobei B die Matrix des Jacobi-Verfahrens ist und

$$\mathbb{R}^{n \times n} \ni A = \begin{pmatrix} I & -C^T \\ -C & I \end{pmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}^{p \times q}, \quad 0 < p, q < n \text{ und } p + q = n$$

gelten.

Abgabe: Dienstag, 18.06.2013, bis 12:15 Uhr in/vor Raum 149 HRZ oder in der Vorlesung.

1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 8 26.6.12

1.1 Aufgabe 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = I - L - R$$

$$\text{mit } L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{L}\omega &= (I - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega R] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega\alpha & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 - \omega & -\omega\alpha \\ 0 & 1 - \omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \omega & -\omega\alpha \\ 0 & 1 - \omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \omega & -\omega\alpha \\ -\omega\alpha(1 - \omega) & \omega^2\alpha^2 + 1 - \omega \end{pmatrix} \end{aligned}$$

charakt. Polynom:

$$\det(\lambda I - \tilde{L}\omega) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 + \omega & \omega\alpha \\ \omega\alpha(1 - \omega) & \lambda - 1 + \omega - \omega^2\alpha^2 \end{pmatrix} = \dots \stackrel{!}{=} 0$$

$$\text{mit NSen: } \lambda_{1,2} - 1 + \omega = \frac{\omega^2\alpha^2}{2} \pm \frac{\omega\alpha}{2} \sqrt{\omega^2\alpha^2 + 4(1 - \omega)}$$

Fallunterscheidung:

$$\alpha = 0: \lambda = 1 - \omega, \quad d.h. |\lambda| < 1 \Leftrightarrow (1 - \omega) < 1 \Leftrightarrow \omega \in (0, 2)$$

$$D := \omega^2\alpha^2 + 4(1 - \omega) < 0 \quad \text{Die Glng. } \omega^2\alpha^2 + 4(1 - \omega) = 0 \text{ f\"ur auf zwei reelle Wurzeln:}$$

$$\omega_{1,2} = 2 \frac{1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha^2}$$

es ist $\omega_1 \in (0, 2)$, da offenbar $\omega_1 > 0$ und au\ss erdem

$$2 \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha^2} < 2 \Rightarrow 1 - \sqrt{1 - \alpha^2} < \alpha^2 \Rightarrow 1 - \alpha^2 < \sqrt{1 - \alpha^2}$$

da $0 < 1 - \alpha^2 < 1$ gilt.

Weiter ist aber $\omega_2 \in (2, \infty)$, denn

$$2 \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha^2} > 2 \Rightarrow 1 + \sqrt{1 - \alpha^2} > \alpha^2 \Rightarrow 1 - \alpha^2 + \sqrt{1 - \alpha^2} > 0$$

Also liegt Fall 2 vor, wenn $\omega_1 < \omega < \omega_2$, dann n\u00e4mlich gilt:

$$\lambda_{1,2} = 1 - \omega + \frac{\omega^2\alpha^2}{2} \pm i \frac{\omega\alpha}{2} \sqrt{-\omega^2\alpha^2 - 4(1 - \omega)}$$

$$\text{Sowie } |\lambda_{1,2}|^2 = (1 - \omega + \frac{\omega^2\alpha^2}{2})^2 + (\frac{\omega\alpha}{2} \sqrt{-\omega^2\alpha^2 - 4(1 - \omega)})^2$$

$$= 1 + \omega^2 + \frac{\omega^2\alpha^2}{4} - 2\omega + \omega^2\alpha^2 - \omega^3\alpha^2 - \frac{\omega^4\alpha^4}{2} - \omega^2\alpha^2 + \omega^3\alpha^2$$

$$= 1 + \omega^2 - 2\omega = 81 - \omega^2$$

$$\Rightarrow \varrho(\tilde{L}\omega) = |1 - \omega|$$

Damit gilt:

$$\varrho(\tilde{L}\omega) < 1 \Rightarrow |1 - \omega| < 1 \Rightarrow \omega \in (0, 2)$$

$$D = \omega^2\alpha^2 - 4(1 - \omega) \geq 0 \quad \text{Dies ist genau dann der Fall, wenn } \omega_2 \leq \omega \leq \omega_1. \text{ denn dann sind die Nsen.}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}(\omega|\alpha| \pm \sqrt{\omega^2\alpha^2 + 4(1 - \omega)^2})$$

zusammen gilt dann:

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geq 0, \text{ womit } \varrho(\tilde{L}\omega) = \lambda_1 \text{ folgt.}$$

Insgesamt gilt.

$$\varrho(\tilde{\omega}) = \begin{cases} |1 - \omega| & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ \frac{1}{4}(\omega|\alpha| + \sqrt{\omega^2\alpha^2 + 4(1 - \omega)})^2 & \omega_2 \leq \omega \leq \omega_1 \end{cases}$$

$$\text{mit } \omega_1 = 2 \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha^2} \in (0, 2)$$

$$\omega_2 = 2 \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha^2} \in (2, \infty)$$

Zur Konvergenz im 3. Fall betrachte

$$\varrho(\tilde{L}\omega) < 1 \Rightarrow \frac{1}{4}(\omega|\alpha| + \sqrt{\omega^2\alpha^2 + 4(1 - \omega)})^2 < 1$$

$$\Rightarrow \omega|\alpha| + \sqrt{\omega^2\alpha^2 + 4(1 - \omega)} < 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\omega^2\alpha^2 + 4(1 - \omega)} < 2 - \omega|\alpha|$$

$$\text{was nur möglich ist, wenn } 2 - \omega|\alpha| > 0 \Rightarrow \omega < \frac{2}{|\alpha|}$$

Es gilt aber $\omega_2 > \frac{2}{|\alpha|}$, denn

$$\frac{2\sqrt{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}}{\alpha^2} > \frac{2}{|\alpha|}$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{1 - \alpha^2} > |\alpha|$$

$$\Rightarrow 1 - |\alpha| + \sqrt{1 - \alpha^2} > 0$$

Damit liegt Konvergenz nur im Fall $\omega \leq \omega_1$ vor.

Betrachte dazu

$$\sqrt{\omega^2\alpha^2 + 4(1 - \omega)} < 2 - \omega|\alpha| \Rightarrow \omega^2\alpha^2 + 4 - 4\omega < 4 - 4\omega|\alpha| + \omega^2\alpha^2 \Rightarrow -\omega < -\omega|\alpha|$$

Mit $|\alpha| \in (0, 1)$ gilt aber $\omega > 0$, womit Konvergenz im 3. Fall nur vorliegt, wenn $\omega \in (0, \omega_1)$.

Zusammen gilt: Konvergenz nur mit $\omega \in (0, 2)$

1.2 Aufgabe 2

Da A die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

ist der kompatible Ordnungsvektor $\begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

Da A symm. gilt: $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, $Z.Z.\bar{\mu} := \varrho(B) < 1$

$$B := H = D^{-1}(L + R) = \begin{pmatrix} 1/2 & & & 0 \\ & 1/2 & & \\ & & 1/2 & \\ 0 & & & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & & 0 \\ 1/2 & * & 1/2 & \\ & 1/2 & * & 1/2 \\ 0 & & 1/2 & * & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(B - \lambda I) = \dots = \lambda^4 - \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{16} \text{ mit NS}$$

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{3 \pm \sqrt{5}}}{8}}$$

$$\text{Folgt: } \bar{\mu} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} < 1 \text{ Nach Vorlesung}$$

$$\varrho(\tilde{L}\omega) > \varrho(\tilde{L}\omega_{opt}) \text{ mit } \omega_{opt} = \frac{2(1-\sqrt{1-\bar{\mu}^2})}{\bar{\mu}^2} \approx 1.2596$$

$$\varrho(\tilde{L}\omega_{opt}) = \omega_{opt} - 1 = 0.2596$$

1.3 Aufgabe 3

$$\begin{aligned} \text{a) } \det \tilde{L}\omega &= \det((D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega R)) \\ &= [\det(D - \omega L)]^{-1} \det([(1 - \omega)D + \omega R]) \\ &= \frac{\det[(1 - \omega)D + \omega R]}{\det(D - \omega L)} = \frac{\prod_{j=1}^n (1 - \omega)d_{jj}}{\prod_{j=1}^n d_{jj}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \tilde{L}\omega &= (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega R] \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\omega C & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (1 - \omega)I & \omega C^T \\ 0 & (1 - \omega)I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ \omega C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 - \omega)I & \omega C^T \\ 0 & (1 - \omega)I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 - \omega)I & \omega C^T \\ (1 - \omega)\omega C & \omega^2 C C^T + (1 - \omega)I \end{pmatrix} \\ (\tilde{L}\omega + (\omega - 1)I)^2 &= \begin{pmatrix} (1 - \omega + \omega - 1)I & \omega C^T \\ (1 - \omega)\omega C & \omega^2 C C^T + (1 - \omega + \omega - 1)I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \omega C^T \\ (1 - \omega)\omega C & \omega^2 C C^T \end{pmatrix} \\ &= \omega^2 \begin{pmatrix} (1 - \omega)C^T C & \omega C^T C C^T \\ (1 - \omega)\omega C C^T C & (1 - \omega)C C^T + \omega^2 C C^T C C^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^2 \tilde{L}\omega &= \begin{pmatrix} C^T C & 0 \\ 0 & C C^T \end{pmatrix} \tilde{L}\omega \\ &= \begin{pmatrix} (1 - \omega)C^T C & \omega C^T C C^T \\ (1 - \omega)\omega C C^T C & (1 - \omega)C C^T + \omega^2 C C^T C C^T \end{pmatrix} \\ \Rightarrow (\tilde{L}\omega + (\omega - 1)I)^2 &= \omega^2 B^2 \tilde{L}\omega \end{aligned}$$