JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Lehrstuhl für Numerische Mathematik
Prof. Dr. E. Berdysheva
Dipl.-Phys. Daniel Schäfer

Numerik II im Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1 (10 Punkte) (a) Zeigen Sie, dass für die Bernstein-Grundpolynome folgende Rekursionsbeziehungen gelten (für $n = 1, 2, \ldots$):

$$\begin{aligned} p_{n,0}(t) &= (1-t)p_{n-1,0}(t), \\ p_{n,\nu}(t) &= (1-t)p_{n-1,\nu}(t) + tp_{n-1,\nu-1}(t), \quad 0 < \nu < n, \\ p_{n,n}(t) &= tp_{n-1,n-1}(t) \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die Monom-Darstellung des Polynoms

$$P(t) = 2p_{4,0}(t) + 3p_{4,1}(t) + 4p_{4,2}(t) + 5tp_{3,3}(t).$$

(c) Berechnen Sie für das Polynom

$$Q(t) = p_{3,0}(t) + 3p_{3,1}(t) + 2p_{3,2}(t) + p_{3,3}(t)$$

die Ableitungswerte $Q^{(k)}\left(\frac{1}{4}\right)$ für $k = 1$ und $k = 2$

(i) mit Hilfe der Formel für die Ableitungen eines Bernstein-Grundpolynoms und

(ii) mit Hilfe der Differentiationsformel für Polynome in Bézier-Darstellung.

(d) Berechnen Sie

$$\sum_{\nu=0}^{16} \left(1 - \frac{\nu}{17}\right) p_{17,\nu}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Das Polynom $P \in \Pi_4$ sei gegeben mit

$$P(x) := 5x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x - 2.$$

(a) Berechnen Sie die Bézier-Darstellung von P.

(b) Bestimmen Sie die Bézier-Punkte des Polynoms P. Skizzieren Sie den Verlauf von P im Intervall $[0, 1]$ sowie die konvexe Hülle der Bézier-Punkte.

(c) Werten Sie P an den Stellen $t = \frac{1}{2}$ und $t = \frac{1}{4}$ mittels des de-Casteljau-Algorithmus aus.

(d) Berechnen Sie die Bézier-Darstellung der ersten und zweiten Ableitung von P und ermitteln Sie $P''(t)$ für $t = -\frac{1}{2}$.

1 Hausaufgabenbesprechung Blatt 10 17.7.12

Aufgabe 1

a) Es gilt:

$p_{n,0}(t) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} t^0(1-t)^n = (1-t)\begin{pmatrix} n-1 \\ 0 \end{pmatrix} t^0(1-t)^{n-1} = (1-t)p_{n-1,0}$ für n=1,2,...

Außerdem:

$p_{n,\nu}(t) = \begin{pmatrix} n \\ \nu \end{pmatrix} t^\nu(1-t)^{n-\nu} = (\begin{pmatrix} n-1 \\ \nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ \nu-1 \end{pmatrix})t^\nu(1-t)^{n-\nu}$

$= (1-t)\begin{pmatrix} n-1 \\ \nu \end{pmatrix} t^\nu(1-t)^{n-1-\nu} + t\begin{pmatrix} n-1 \\ \nu-1 \end{pmatrix} t^{\nu-1}(1-t)^{(n-1)-(\nu-1)}$

$= (1-t)p_{n-1,\nu}(t) + tp_{n-1,\nu-1}(t)$ für $0 < \nu < n$, $n = 2, 3, ...$

sowie $p_{n,n}(t) = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} t^n = t\begin{pmatrix} n-1 \\ n-1 \end{pmatrix} t^{n-1} = tp_{n-1,n-1}(t)$

b) Die Koeffizienten α_ν der Monomdarstellung.

$P(t) = \sum_{\nu=1}^{4} \alpha_\nu t^\nu$

berechnen wir gemäß: $\alpha_\nu = \begin{pmatrix} 4 \\ \nu \end{pmatrix} \Delta^\nu \beta_0$, $\nu = 0, .., 4$

Dabei sind die β_ν für $\nu = 0, ..., 4$ die Bézierkoeffizienten des Polynoms.

Nondo's Peri–Peri–Soße ist toll

$P(t) = 2p_{4,0}(t) + 3p_{4,1}(t) + 4p_{4,2}(t) + 5p_{3,3}(t)$

$= 2p_{4,0}(t) + 3p_{4,1}(t) + 4p_{4,2}(t) + 5p_{4,4}(t)$

Die auftretenden DIfferenzen berechnen wir gm. dem folgenden Dreiecksschema:

$$\begin{array}{lllll}
\beta_0 = 2 & & & & \\
 & 1 & & & \\
\beta_1 = 3 & & 0 & & \\
 & 1 & & -5 & \\
\beta_2 = 4 & & -5 & & 19 \\
 & -4 & & 14 & \\
\beta_3 = 0 & & 9 & & \\
 & 5 & & & \\
\beta_4 = 5 & & & &
\end{array}$$

Damit hat P die Monomdarstellung

$P(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 2 + 1t^1\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 0t^2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 5t^3\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 19t^4\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$= 2 + 4t - 20t^3 + 19t^4$

c i) Es ist

$Q'(\frac{1}{4}) = p'_{3,0}(\frac{1}{4}) + 3p'_{3,1}(\frac{1}{4}) + 2p'_{3,2}(\frac{1}{4}) + p'_{3,3}(\frac{1}{4})$

$p'_{3,0}(\frac{1}{4}) = \prod_{j=0}^{0}(3-j)\sum_{\mu=0}^{1}(-1)^\mu \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix} p_{2,\mu-1}(\frac{1}{4})$

$= 3((-1)^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 0 + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} p_{2,0}(\frac{1}{4}))$

$= -3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} (1 - \frac{1}{4})^2 = -\frac{27}{16}$

Desgleichen $p'_{3,1}(\frac{1}{4}) = \frac{9}{10}$, $p'_{3,2}(\frac{1}{4}) = \frac{15}{16}$, , $p'_{3,3}(\frac{1}{4}) = \frac{3}{16}$

Es ergibt sich

$Q'(\frac{1}{4}) = -\frac{27}{16} + 3\frac{9}{16} + 2\frac{15}{16} + \frac{3}{16} = \frac{33}{16}$

Analog: $p'''_{3,0}(\frac{1}{4}) = -6$, $p'''_{3,1}(\frac{1}{4}) = 18$, $p'''_{3,2}(\frac{1}{4}) = -18$, $p'''_{3,3}(\frac{1}{4}) = 6$

also

$Q'''(\frac{1}{4}) = 18$, $q'(\frac{1}{4}) = \frac{33}{16}$

ii) $Q'(\frac{1}{4}))\frac{33}{16}$

Analog: $Q'''(\frac{1}{4}) = 18$

d) $\sum_{\nu=0}^{16} (1 - \frac{\nu}{17}) p_{17,\nu}(\frac{1}{2}) = \sum_{\nu=0}^{17} (1 - \frac{\nu}{17}) p_{17,\nu}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

Aufgabe 2

a) Für das Polynom $P(t) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t^\nu$

ergeben sich die Bézierkoeffizienten β_ν

$$\beta_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{\begin{pmatrix} \nu \\ \mu \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ \nu - \mu \end{pmatrix}} a_{\nu-\mu} \ , \quad \nu = 0, ..., n$$

Hier nun ist n=4, damit $a_0 = -2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 1$, $a_3 = -3$, $a_4 = 5$. Damit:

$\beta_0 = a_0 = -2$

$\beta_1 = \frac{1}{4}a_1 + a_0 = \frac{3}{4}$

$\beta_2 = \frac{1}{6}a_2 + \frac{1}{2}a_1 + a_0 = \frac{2}{3}$

$\beta_3 = \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{3}{4}a_1 + a_0 = 2$

$\beta_4 = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 6$

Somit $P(t) = 6b_{4,4}(t) + \frac{3}{2}b_{3,4}(t) + \frac{2}{3}b_{2,4}(t) - \frac{3}{4}b_{1,4}(t) - 2b_{0,4}(t)$ (b verm p)

b) Die Bézier–Punkte sind gegeben durch

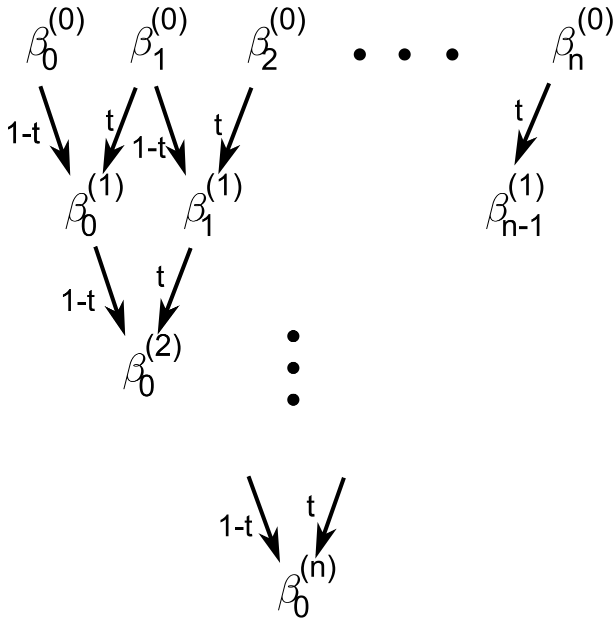
$P_\nu = \begin{pmatrix} \nu/n \\ \beta_\nu \end{pmatrix}$, $\nu = 0, ..., n$

Mit (a) ergibt sich also

$P_0 = (0, -2)$, $P_1 = (\frac{1}{4}, -\frac{3}{4})$, $P_2 = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, $P_3 = (\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$, $P_4 = (1, 6)$

Punkte in Koordsys eintragen und Verbinden. P_1 und P_3 verbinden, da sonst Hülle nicht konvex!

c) Algorithmus von Casteljau:



Dabei kommt heraus für $t = \frac{1}{2}$: $\frac{11}{16}$
und $t = \frac{1}{4}$: -0.7148423243
Geometrische Auswertung von P an der Stelle $\frac{1}{2}$: zunächst zeichnen wir das Bézier–Polynom und markieren jew. die Mitten der einzelnen Geradenstücke. Anschließend verbinden wir jew. zwei benachbarte Mittelpunkte; mit den entstandenen nerven Geradenstücken Verfahren wir iterativ genauso. als Näherung lesen wir ab: $P(\frac{1}{2}) \approx 0.7$

d) zur Berechnung der Ableitung benutzen wir
$\Delta^1\beta_\nu$, $\nu = 0, ..., n-1$
$\Delta^2\beta_n$, $\nu = 0, ..., n-2$

Δ^0	-2		$-\frac{3}{4}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{2}$		6
Δ^1		$\frac{5}{4}$		$\frac{17}{12}$		$\frac{5}{6}$		$\frac{9}{2}$	
Δ^2			$\frac{1}{6}$		$-\frac{7}{12}$		$\frac{11}{3}$		

Damit folgt: $P'(t) = 4 \sum_{\nu=0}^{3} \Delta^1\beta_\nu b_{3,\nu}(t)$
$= 4(\frac{5}{4}b_{3,0}(t) + \frac{17}{12}b_{3,1}(t) + \frac{5}{6}b_{3,2}(t) + \frac{9}{2}b_{3,3}(t))$
$= 5b_{3,0}(t) + \frac{12}{3}b_{3,1}(t) + \frac{10}{3}b_{3,2}(t) + 18b_{3,3}(t)$
$P''(t) = 4 \cdot 3 \sum_{\nu=0}^{2} \Delta^2\beta_\nu b_{2,\nu}(t)$
$= 12(\frac{1}{6}b_{2,0}(t) - \frac{7}{12}b_{2,1}(t) + \frac{11}{3}b_{2,2}(t))$
$= 2b_{2,0}(t) - 7b_{2,1}(t) + 44b_{2,2}(t)$
Algorithmus von Casteljau: ... $P''(\frac{1}{2}) = 26$

Aufgabe 3

Offenbar ist die Funktion $S(t)$ in den offenen Intervallen $(\nu, \nu+1)$ für $\nu = 0, ..., 3$ ein Polynom und damit beliebig oft stetig dbar.
Um die stetige dbarkeit in den Punkten $\nu = 1, 2, 3$ zu überprüfen, betrachte die folgenden Differenzenschemata:

$$
\begin{array}{ccc@{\qquad}ccc@{\qquad}ccc@{\qquad}ccc}
1 & & & 1 & & & 3 & & & 0 & & \\
 & 1 & & & 1 & & & -1 & & & 2 & \\
0 & & 1 & 2 & & 1 & 2 & & -3 & 2 & & 4 \\
 & 0 & & & 2 & & & -4 & & & 6 & \\
0 & & 1 & 4 & & -3 & -2 & & 6 & 9 & & -6 \\
 & 1 & & & -1 & & & 2 & & & 0 & \\
1 & & & 3 & & & 0 & & & 8 & &
\end{array}
$$

1. Intervall: 2. Intervall 3. Intervall 4. Intervall

Hier bei gilt: untere diagonale links und obere rechts in den Blöcken müssen übereinstimmen.

$zub: S \in C^2([0,3])$
$S \in C^1([3,4])$
$S \notin C^2([0,4])$, $S \in C^1([0,4])$.