8 Übungen zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, den 24.11.2009

8.1

a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$ *ist stetig* auf $(0, \infty)$, da ein Funktionswert eines x durch ein zu diesem x beliebig nahem x_0 ebenfalls beliebig nahe zu dessen Funktionswert $f(x_0)$ steht. Also $\forall x_0 \in (0, \infty)\ \exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in (0, \infty),\ |x_0 - x| < \delta :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Die Funktion ist allerdings *nicht gleichmäßig stetig*, da je weiter man für $x \to 0$ zwei Punkte x und x_0 mit einem Abstand kleiner als δ wählt, desto größer der Abstand der beiden Funktionswerte wird. Damit wäre der Abstand nicht mehr unbedingt größer als ein vorgegebenes ε. Somit gilt hier nicht mehr, dass $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x_0 \in (0, \infty),\ |x - x_0| < \delta :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *ist stetig* auf $\mathbb{R}$, da ein Funktionswert eines x durch ein zu diesem x beliebig nahem x_0 ebenfalls beliebig nahe zu dessen Funktionswert $f(x_0)$ steht. Also $\forall x_0 \in (0, \infty)\ \exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in (0, \infty),\ |x_0 - x| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Die Funktion ist auch *gleichmäßig stetig*, da z.B. für $\delta = 2$ gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \forall x, x_0 \in (0, \infty),\ |x - x_0| < 2 :\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

8.2

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -24 & -11 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & -12 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$3x_3 = 1 \ \Rightarrow\ x_3 = \frac{1}{3}$

$-12x_2 - 7 \cdot \frac{1}{3} \ \Rightarrow\ x_2 = \frac{1}{18}$

$x_1 + 8 \cdot \frac{1}{18} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2 \ \Rightarrow\ x_1 = \frac{5}{9}$

$$\Rightarrow\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{1}{18} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$-\frac{1}{3}x_4 = \frac{1}{3} \ \Rightarrow\ x_4 = -1$

$2x_3 + 2 \cdot (-1) = 2 \ \Rightarrow\ x_3 = 0$

$-3x_2 + 0 = 6 \ \Rightarrow\ x_2 = -2$

$x_1 - 2 + 0 + 2 \cdot (-1) = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = 4$

$$\Rightarrow\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8.3

Da es zu jedem $x \notin \mathbb{Q}$ min. ein $x_0 \in \mathbb{Q}$ gibt, wofür gilt $\forall \varepsilon > 0 : |x - x_0| < \varepsilon$, allerdings $|f(x) - f(x_0)| = 1$, ist die Funktion in allen Punkten unstetig.

$f|_{\mathbb{Q}}$ beschränkt sich auf die rationalen Zahlen, wodurch für den Definitionsbereich und somit für die Stetigkeit gilt, dass jeder zu $x \in \mathbb{Q},\ f(x) = 1$ beliebig nahe Funktionswert ebenfalls Element von $\mathbb{Q}$ ist, also $x_0 \in \mathbb{Q},\ f(x_0) = 1$. Dadurch entsteht auf dem Definitionsbereich mit der Funktion f eine Konstante $f(x) = 1$. Nach der Definition der Stetigkeit ist durch $\forall \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| = 0 < \delta$ also $\forall x_0 \in (0, \infty)\ \exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in (0, \infty),\ |x_0 - x| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ erfüllt.

Selbes gilt für $f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, da hier aus oben genannten Grund für die Einschränkung auf die irrationalen zahlen die Konstante $f(x) = 0$ entsteht.

8.4

1) $\sum \frac{j}{2^j} \Rightarrow$ Quotientenkriterium:
   $\frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{2^n n}{2^n \cdot 2n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < 1$ (für $n > 1$)
   $\Rightarrow$ konvergent!
2) $\sum \frac{j!}{j^j} \Rightarrow$ Quotientenkriterium:
   $\frac{(j+1)!}{(j+1)^{j+1}} \cdot \frac{j^j}{j!} = \frac{j^j (j+1)!}{j!(j+1)^{j+1}} = \frac{j!(j+1)j^j}{j!(j+1)(j+1)^j} = \frac{j^j}{(j+1)^j} < 1$ (da Nenner größer als Zähler)
   $\Rightarrow$ konvergent!
3) $\sum \frac{j!}{j^j} \Rightarrow$ Mayorantenkriterium:
   $\forall j : sqrt(j+1) - sqrt(j) > \frac{1}{3j}$. $\sum \frac{1}{3j} = \frac{1}{3} \sum j$ ist divergent. Nach Mayorantenkriterium ist dadurch, dass der Minorant $\frac{1}{3j}$ divergent ist, auch $\sqrt{j+1} - \sqrt{j}$ divergent.
   $\Rightarrow$ divergent!
4) $\sum \left(\frac{j}{j+1}\right)^{j^2} \Rightarrow$ Wurzelkriterium:
   $\sqrt[j]{\left(\frac{j}{j+1}\right)^{j^2}} = \left(\frac{j}{j+1}\right)^{\frac{j \cdot j}{j}} = \left(\frac{j}{j+1}\right)^{j}$
   $\lim_{j \to \infty} sup \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{j}}\right)^j = 1 - \varepsilon < 1$
   $\Rightarrow$ konvergent!

8.5

a) Eine Basis von $\mathbb{C}^3$ können 4 Vektoren aus K^3 niemals bilden, da sie dafür ein minimales Erzeugendensystem bilden müssten und dieses in der Anzahl der erzeugenden Vektoren gleich $dim(\mathbb{C}^3) = 3$ sein müssten. Folglich ist mindestens ein Vektor der 4 durch die anderen 3 Vektoren darstellbar und damit sind die 4 Vektoren nicht mehr linear unabhängig. Dadurch ergibt sich, dass sie kein minimales Erzeugendensystem bilden und somit keine Basis von $\mathbb{C}^3$ sind.

   Um ein Erzeugendensystem von $\mathbb{C}^3$ zu bilden, müssen 3 der 4 Vektoren linear unabhängig sein.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1-i & 1+i & 2+i \\ 2+i & 3-i & 2+3i & 3+4i \\ i & 1-i & 1+i & 1-i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3-i & 2+i & 3+2i \\ 0 & 1-i & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-i & i & -1+2i \\ 0 & 0 & -i & -2i \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Es ex. eine eindeutige Lösung, somit ist v_4 durch eine Linearkombination der 3 anderen Vektoren darstellbar.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1-i & 1+i \\ 2+i & 3-i & 2+3i \\ i & 1-i & 1+i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2+i & 3 & 2+2i \\ i & 1-i & 1+i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1+i & 0 & -1+2i \\ -1+i & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Es ex. keine Lösung, somit sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig. Da sie die größtmögliche Anzahl an linear unabhängigen Vektoren im $\mathbb{C}^3$-Raum bilden, sind Sie ein Erzeugendensystem von $\mathbb{C}^3$

$\Rightarrow$ Erzeugendensystem, keine Basis

b) Da die Vektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{C}^3$ bilden, spannen Sie dementsprechend auch einen 3-Dimensionalen Raum auf,

weswegen $dim_{\mathbb{C}} span\{v_1, ..., v_4\} = 3$

8.6

b) Alle Pauli-Matrizen haben jeweils 2 Elemente = 0 und 2 Elemente $\neq 0$. Außerdem hat Matrix e und σ_z ihre 0-Elemente in den selben Indizes. Da aber für die restlichen Elemente gilt, dass eines identisch und eines die Negierung des anderen Wertes ist, können diese Matrizen sich nicht gegenseitig darstellen. selbes gilt für die Matrizen σ_x und σ_y. Da außerdem gilt, dass $e_{ij} \cdot \sigma_{xij} = \sigma_{y_{ij}} \cdot \sigma_{zij} = 0$ kann keine Matrix aus den 4 Matrizen durch eine Linearkombination der 3 anderen dargestellt werden. Folglich sind die 4 Matrizen linear unabhängig. Da Sie damit die größtmägliche Anzahl an linear unabhängigen Matrizen im $\mathbb{C}^{2\times2}$-Raum bilden, sind Sie ein minimales Erzeugendensystem dieses Raumes und damit dessen Basis.

a) Da für b) gezeigt wurde, dass die Pauli-Matrizen eine Basis für $\mathbb{C}^{2\times2}$ darstellen, sind Sie eine mögliche Antwort auf diese Teilaufgabe.

Eine weitere mögliche Basis wäre

$$a = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

8.7

a) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{-j}p^-j$ konvergiert, da nach Analysis-Skript 7.9 die Reihe $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^j$ für $n > 1$ konvergiert und der vorfaktor a_{-j} ja ein Element von $\{0, ..., p-1\}$ sein muss und dementsprechend im größtmöglichen Fall $a_{-j} = p-1$ die Reihe wiefolgt verändern würde $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{p-1}{p^j} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p^{j-1}} + \frac{1}{p^j}$, was immer noch konvergieren würde.

a_j ist in der entgültigen konvertierten Zahl nicht eindeutig, da man an $maxa_j$ zwar alle Zahlensystem ausschließen könnte, bei denen $p \leq maxa_j$, jedoch könnten dennoch alle übrigen Zahlensysteme zutreffen. z.B. ist die Zahl 123 zwar kein Element der Zahlensysteme mit $p = 2$ oder $p = 3$, jedoch kann die Zahl als Element des Zahlensystems $p = 4$ oder $p = 27$ verstanden werden. Der Wert der Zahl würde sich dabei aber ändern! Dadurch ist die a_j ohne Angabe von p immer mehrdeutig.

b) $0.5_{10} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j - 1 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j = \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-2} + 1 \cdot 3^{-1} + 1 \cdot 3^{-3} + ... \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)_3 \sim 0.\overline{1}$