Übersicht zu vektoriellen Differentialoperatoren

- **Skalare Felder**

  Funktion $\Phi(x, y, z)$, die jedem Raumpunkt $P(x_1, y_2, z_3)$ einen Skalar, den Wert $\Phi(x_1, y_2, z_3)$ zuordnet.

  Beispiele: Temperaturfelder, Dichtefelder (Massendichte, Ladungsdichte)

- **Vektorielle Felder**

  Funktion $\vec{A}(x, y, z)$, die jedem Raumpunkt $P(x_1, y_2, z_3)$ einen Vektor $\vec{A}(x_1, y_2, z_3)$ zuordnet.

  Beispiele: Elektrische, Magnetische Felder; Geschwindigkeitsfelder, z.B. in strömenden Gasen oder Flüssigkeiten.

- **Gradient**

  Der Gradient eines Skalarfeldes $\Phi(x, y, z)$ grad $\Phi(x_0, y_0, z_0)$ ist ein **Vektor**, der in Richtung des stärksten Anstiegs von Φ zeigt (Definition des Gradienten : grad $\Phi = \nabla\Phi = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})\Phi)$ und dessen Betrag die Änderung von ϕ pro Weglänge in Richtung des stärksten Anstiegs im Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ ist. Jedem Punkt eines Skalarfeldes kann man so einen Gradientenvektor zuordnen. Die Gesamtheit aller Gradientenvektoren bildet ein dem Skalarfeld zugeordnetes Vektorfeld $\vec{A}(x, y, z)$=grad Φ.

- **Divergenz**

  Die Divergenz wird auf Vektorfelder angewandt. Sie stellt also das Skalarprodukt zwischen dem Nablaoperator und dem Vektorfeld $\vec{A}$ dar. Sie ist also ein **Skalar**!!! Anhand der Definition

  $$div\vec{A} = \vec{\nabla}\vec{A} = lim\frac{\text{Fluss des Vektorfeldes } \vec{A} \text{ durch } \Delta \text{ V}}{\Delta V}$$

  erkennt man, dass es sich bei der Divergenz um einen Vektorfluss, also die Gesamtheit der Vektoren, die ein Volumen durchströmen, handelt. Man stellt sich also vor, dass bei verschwindender Divergenz der Gesamtvektorfluss durch ein infinitesimales Volumen ΔV Null ist- es fließt genau so viel in das

Volumenelement herein wie auch heraus. Anschaulich gibt also die Divergenz den Nettofluss = Ausfluss-Einfluss an. Gilt an einer Stelle des Vektorfeldes div $\vec{A} > 0$, so hat das Vektorfeld dort eine Quelle; im Fall div $\vec{A} < 0$ hat das Vektorfeld eine Senke. Man spricht von der Divergenz auch als *Quelldichte*.

- **Rotation**

  Die Rotation ordnet dem Vektorfeld $\vec{A}$ ein **Vektorfeld** rot $\vec{A}$ zu. Man definiert die Rotation wie folgt

$$rot\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$$

bzw:

$$rot\vec{A} = lim_{\Delta F \to 0} \frac{\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta F}$$

Anhand der zweiten Defintion liest man auch ab, dass die Rotation eines Feldes verschwindet, wenn das Linienintegral Null ist (Stokesscher Satz). Anschaulich drückt die Rotation eine Wirbelbildung des Vektorfeldes aus, was man sich ebenfalls anhand des Ringintegrals über die zweite Definition klar macht.

Wichtige Schlussfolgerungen:

Ein Gradientenfeld ist wirbelfrei: rot grad f=0!

Ein Rotationsfeld besitzt keine Quellen oder Senken : div(rot$\vec{g}$)=0!

P11 (Integration):

P11-1

(a) $\int_0^x y^2 e^{-y^2} dy = \int_0^x y \cdot y e^{-y^2} dy = (*)$

Partielle Integration: $\int_a^b f g' dx = fg\Big|_a^b - \int f' g\, dx$
(allgemein)

$(*) = \int_0^x \underset{f}{y} \cdot \underset{g'}{y e^{-y^2}} dy = y \cdot \frac{-e^{-y^2}}{2}\Big|_0^x - \int_0^x 1 \cdot (-) \frac{e^{-y^2}}{2} dy$

$-\frac{x e^{-x^2}}{2} + 0$

$f' = 1;\ g = -\frac{e^{-y^2}}{2}$, denn
$g' = -(-2y)\frac{e^{-y^2}}{2} = y e^{-y^2}$

Also: $\int_0^x y^2 e^{-y^2} dy = \frac{1}{2}\left(-x e^{-x^2} + \int_0^x e^{-y^2} dy\right)$ ✓

(b) Allg. Substitutionsformel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u=u(a)}^{u=u(b)} f(x(u)) \frac{dx(u)}{du} du$$

Hier speziell:

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^{\pi/4} \sin x \cdot \cos^3 x\, dx \\ \text{Subst.: } u = \cos x\Big|_0^{\pi/4} \Big|_{\cos(0)}^{\cos(\pi/4)} \Rightarrow du = -\sin x\, dx \end{array}\right\} = -\int_{\cos(0)}^{\cos(\pi/4)} u^3 du = -\frac{1}{4}u^4\Big|_{\cos(0)}^{\cos(\pi/4)}$$

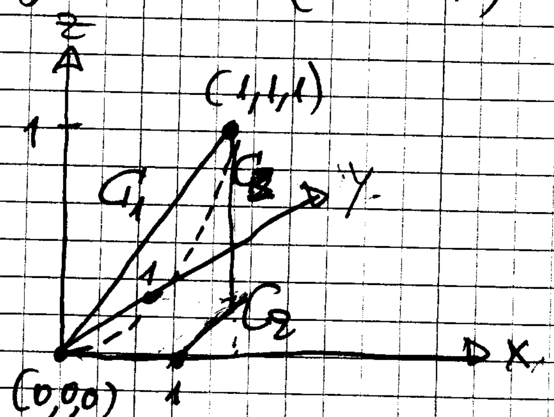
Rücksubst.:

P11-2

$$= -\frac{1}{4}\cos^4(x)\Big|_0^{\pi/4} = -\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - 1\right] = \frac{3}{16}.$$

P12-1

(a) Gegeben: $\vec{a} = (3x^2+2y, -9yz, 8xz^2)$



$$\int_{C_1, C_2} \vec{a}\cdot d\vec{r} = ?$$

Direkte Weg:

C_1: $\int_{C_1} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) =$

$$= \int_{C_1} [3x^2 + 2y(x)]dx + \int_{C_1} [-9yz(y)]dy + \int_{C_3} 8x(z)z^2 dz =$$

Auf C_1 ist aber $y=x$ bzw. $z=y$ und $x=z$. Also

$$= \underbrace{\int_0^1 (3x^2+2x)dx}_{\left(\frac{3x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1} + \underbrace{\int_0^1 (-)9y^2 dy}_{-9\frac{y^3}{3}\Big|_0^1} + \underbrace{\int_0^1 8z^3 dz}_{\frac{8z^4}{4}\Big|_0^1} = 2 - 3 + 2 = \underline{\underline{1}}$$

$\Rightarrow$

$$\underline{\underline{\int_{C_1} \vec{a}\cdot d\vec{r} = 1}}$$

C_2: Teilstücke parallel zu den Koordinatenachsen: Wir zerlegen also den Weg in drei glatten Teilstücken: $C_2 = C_{2,x} + C_{2,y} + C_{2,z}$; die Teilstücke sind parallel zu je einer Achse! (P12-2)

Auf $C_{2,x}$ von $(0,0,0) \to (1,0,0)$ ist $y=z=0$, also $dy=dz=0$

$$\curvearrowright \int_{C_{2,x}} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_{C_{2,x}} a_x dx = \int_0^1 3x^2 dx = 3\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1$$

Auf $C_{2,y}$ von $(1,0,0) \to (1,1,0)$ ist: $x=1, z=0$, also $dx=dz=0$

$$\curvearrowright \int_{C_{2,y}} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_{C_{2,y}} a_y dy = \int_0^1 (-9y\cdot 0)\, dy = 0$$

Auf $C_{2,z}$ von $(1,1,0) \to (1,1,1)$: $x=y=1$, $dx=dy=0$

$$\curvearrowright \int_{C_{2,z}} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_{C_{2,z}} a_z dz = \int_0^1 8\cdot 1\cdot z^2 dz = 8\frac{z^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{8}{3}$$

Zusammengefaßt also:

$$\int_{C_2} \vec{a}\cdot d\vec{r} = 1 + 0 + \frac{8}{3} \neq \int_{C_1} \vec{a}\cdot d\vec{r} \,!$$

P12-3

(b) Durch geeignete Parametrisierung:

Parameterdarstellung für die Gerade C_1:

$$\vec{r}(t) = (t,t,t) \text{ mit } 0 \leq t \leq 1$$

Parameterdarstellung für den Weg C_2 (stückweise Geraden):

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (t_1, 0, 0) \\ (1, t_2, 0) \\ (1, 1, t_3) \end{cases} \text{ mit } 0 \leq t_i \leq 1 \; (i=1,2,3)$$

Allg. Berechnung mittels Parameterdarstellung:

$$\int_C \vec{a}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{a}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \, dt$$

C_1: $\vec{r}(t) = (t,t,t) \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = (1,1,1)$

$$\vec{a}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = (3t^2 + 2t) \cdot 1 + (-9t \cdot t) \cdot 1 + 8 \cdot t \cdot t^2$$

$$= 8t^3 - 6t^2 + 2t$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} \vec{a}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_0^1 (8t^3 - 6t^2 + 2t) dt =$$

$$= \left(8\frac{t^4}{4} - 6\frac{t^3}{3} + 2\frac{t^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 = 2 - 2 + 1 = \underline{\underline{1}}$$

C_2:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (t_1, 0, 0) \\ (1, t_2, 0) \\ (1, 1, t_3) \end{cases} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{cases}$$

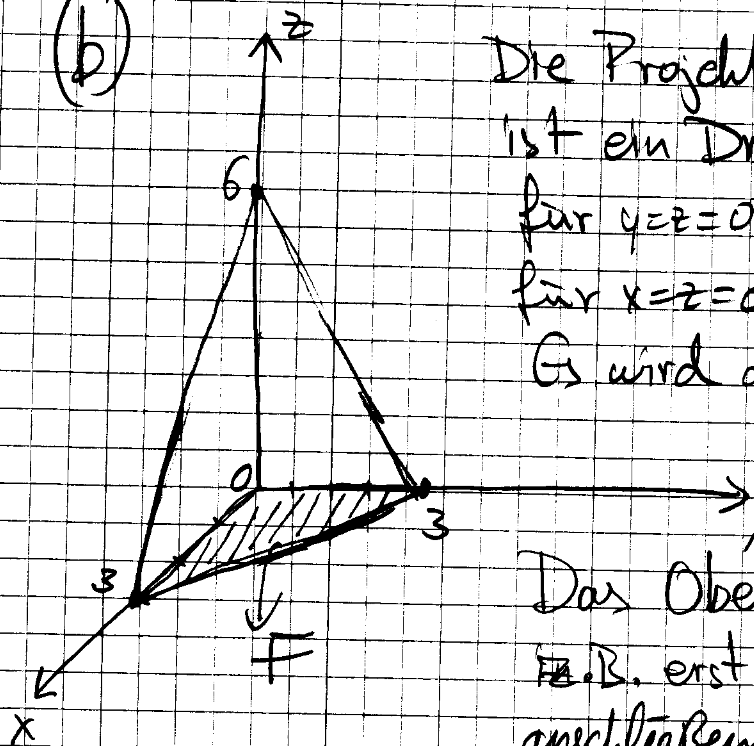
(P12-4)

$$\vec{a}(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{cases} 3t_1^2 \cdot 1 \\ -9\cdot t_2 \cdot 0 \\ 8\cdot 1\cdot t_3^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{C_2} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_{C_{2,x}} \vec{a}\cdot d\vec{r} + \int_{C_{2,y}} \vec{a}\cdot d\vec{r} + \int_{C_{2,z}} \vec{a}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_0^1 3t^2\,dt + 0 + \int_0^1 8t^2\,dt = \underline{\underline{1 + \frac{8}{3}}} \checkmark$$

(b)



Die Projektion von F auf der xy-Ebene ist ein Dreieck (siehe Skizze), denn

für $y=z=0 \Rightarrow x=3$;

für $x=z=0 \Rightarrow y=3$.

Es wird durch die Gerade $\underline{\underline{x+y=3}}$ aus dem 1ten Quadranten herausgeschnitten.

Das Oberflächenintegral wird also z.B. erst über y ($0 \le y \le 3-x$), und anschließend über x von 0 bis 3:

$$\phi = \int_F dx\,dy\,(50-14x-16y) = \int_0^3 dx \underbrace{\int_0^{3-x} (50-14x-16y)\,dy}_{50(3-x)-14x(3-x)-16\frac{(3-x)^2}{2}} =$$

$$= \int_0^3 dx\left[50(3-x) - 14x(3-x) - 8(3-x)^2\right] = \underline{\underline{90}}.$$

P13-1

(a) Gegeben: $\vec{F} = (2xy+z^3, x^2, 3xz^2)$

Die Berechnung des Kurvenintegrals von $(0,0,0) \to (1,1,1)$ über die Wege C_1 und C_2 (vgl. P12(a)) erfolgt ganz analog wie in P12(a):

Über C_1: $$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_0^1 (2\cdot x\cdot x + x^3)\,dx}_{\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1} + \underbrace{\int_0^1 y^2\,dy}_{\frac{y^3}{3}\Big|_0^1} + \underbrace{\int_0^1 3\cancel{z}\cdot z^2\,dz}_{\frac{3z^4}{4}\Big|_0^1} =$$

$$= \frac{11}{12} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{24}{12} = 2$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2$$

Über C_2: $$\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 (2\cdot x\cdot 0 + 0) + \int_0^1 1^2\,dy + \int_0^1 3\cdot 1\cdot z^2\,dz =$$

(da auf $C_{2,x}$: $y=z=0$) (auf $C_{2,y}$ ist $x=1$) (auf $C_{3,z}$ ist $x=1$)

$$= 0 + \int_0^1 dy + 3\int_0^1 z^2\,dz = 1 + 3\cdot\frac{1}{3} = 2$$

$$\Rightarrow \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2 = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} \;!$$

$\Rightarrow$ Kurvenintegral $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ wegunabhängig!

(b) Das Feld $\vec{F}$ ist wirbelfrei: $\mathrm{rot}\vec{F}=\vec{0}$; (P13-B)

$$(\mathrm{rot}\vec{F})_x=(\vec{\nabla}\times\vec{F})_x=\partial_y F_z-\partial_z F_y=0-0=0$$

$$(\mathrm{rot}\vec{F})_y=(\vec{\nabla}\times\vec{F})_y=\partial_z F_x-\partial_x F_z=3z^2-3z^2=0$$

$$(\mathrm{rot}\vec{F})_z=(\vec{\nabla}\times\vec{F})_z=\partial_x F_y-\partial_y F_x=2x-2x=0$$

Ferner ist $\vec{F}$ im ganz $\mathbb{R}^3$ definiert, somit ist es vom Weg unabhängig und somit ist seine Zirkulation Null (dies folgt auch aus dem Stoke'schen Satz

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}=\int_{(C)} \mathrm{rot}\vec{A}\cdot d\vec{F}$$).

(c) Da $\mathrm{rot}\vec{F}=\vec{0}$ und $\vec{F}$ in ganz $\mathbb{R}^3$ definiert, lautet die Antwort Ja. Das zugehörige Potential φ findet man über das Gradientenfeld:

$$\vec{F}=\vec{\nabla}\varphi$$

z.B. über die x-Komponente ist:

$$F_x=2xy+z^3=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Integration über x liefert:

$$\varphi=\int(2xy+z^3)dx=x^2y+xz^3+g(y,z)$$

Integrationskonstante bzgl. x, die eventuell noch von y & z abhängen kann.

Weiter 1A: P13-3

$$F_y = x^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y + xz^3 + g(y,z)\right) = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{\partial}{\partial y} g(y,z) = x^2 \text{ oder } \underline{\frac{\partial}{\partial y} g(y,z) = 0}$$

$$\Rightarrow g = g(z).$$

Analog: $F_z = 3xz^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 y + xz^3 + g(z)\right) = 3xz^2$

$$\Rightarrow 3xz^2 + \frac{\partial}{\partial z} g(z) = 3xz^2 \Rightarrow \underline{\frac{\partial}{\partial z} g(z) = 0}$$

$$\Rightarrow \underline{g = \text{const.}}$$

Insgesamt haben wir also φ (bis auf beliebige Konstante) bestimmt:

$$\boxed{\varphi = x^2 y + xz^3 \; (+\text{const.})}$$

Bemerkung: φ heißt oft Stammfunktion oder Potential von $\vec{F}$; In der Physik wird im allgemeinen $\underline{\underline{-\varphi}}$ so bezeichnet.