Prof. Mosel **Wintersemester 2007/2008**

Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

Präsenzaufgaben für den 5.11.2007

P7. Wiederholung (Indexkalkül,Ableitungen)

(a) Beweisen Sie im Indexkalkül folgende Beziehung: $(\vec{a}\times\vec{b})^2 = a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$.

(b) Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:
$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+e^{x^2}}\right)$, $g(x) = \sinh\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

P8. Differentation von vektorwertigen Funktionen
Gegeben seien zwei von einer Variable u abhängige Vektorfunktionen $\vec{a}(u) = \vec{e}_x - u\vec{e}_x + u^2\vec{e}_y + u\vec{e}_z - u^2\vec{e}_z$ und $\vec{b}(u) = u^3\vec{e}_x - \vec{e}_y + 2u^2\vec{e}_z - \vec{e}_z$. Berechnen Sie direkt sowie auch unter Verwendung der allgemeinen Rechenregel für die Vektordifferentation folgende Ausdrücke:

$$\frac{d}{du}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right),\quad \frac{d}{du}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\quad . \tag{1}$$

P9. Skalares Feld
Gegeben seien die skalaren Felder $\phi_1(\vec{r}) = \vec{a}\cdot\vec{r}$, $\phi_2(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}$ sowie eine nur vom Betrag des Ortsvektors abhängige total differenzierbare Funktion $f(r)$.

(a) Berechnen Sie folgende *partielle* Ableitungen: $\vec{\nabla}f(r)$, $\frac{\partial}{\partial x}\phi_1(\vec{r})$, $\partial_i\phi_1(\vec{r})$, $\partial_i\phi_2(\vec{r})$

(b) Zeigen Sie, dass Gradientenfelder rotationsfrei sind. Es ist also (für eine beliebige, aber mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion Φ) zu zeigen, dass gilt: $rot(grad\Phi) = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\Phi) = \vec{0}$.

P10. Vektorielles Feld

(a) Skizzieren Sie die Feldlinien des Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r}(\vec{\omega}\times\vec{r})$ ($\vec{\omega} = \omega_z\vec{e}_z$; $\omega_z = const.$) senkrecht zur z-Achse.

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen des Vektorfeldes sowie dessen Divergenz und Rotation.

Bitte Wenden!

Hausaufgaben für den 12.11.2007

H6. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass Rotationsfelder divergenzfrei sind. Es ist also (für eine beliebige, aber mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion $\vec{A}$) zu zeigen, dass gilt: $div(rot\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$.

H7. (4 Punkte) Gegeben sei ein skalares Kraftfeld $F(r)$, das nur vom Betrag des Ortsvektors abhängt. Zeigen Sie im Indexkalkül, dass gilt: $rot(F(r)\vec{r}) = \vec{0}$.

H8. (4 Punkte) Gegeben sei folgendes Kraftfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = (2axy,\ bx^2 + cy^2,\ 0)$. Berechnen Sie die Divergenz und Rotation dieses Feldes. Wie müssen die Konstanten a, b, c gewählt werden, damit das Feld quellen- bzw. wirbelfrei ist?