(P14) (P14-1)

Volumenintegrale werden durch 3-fache Integrale aufgefaßt:

$$\int_V \varphi(\vec{r})\, d^3r \equiv \int_V \varphi(x,y,z) \underbrace{dx\,dy\,dz}_{\substack{\text{Volumenelement}\\ \text{in kartesischen}\\ \text{Koordinaten}}} =$$

$$= \int_{x_a}^{x_b} dx \left\{ \iint_{F(x)} dy\,dz\, \varphi(x,y,z) \right\} =$$

Für jedes $x \in [x_a, x_b]$ wird ein Doppelintegral über eine Fläche F ausgewertet, deren Form im Allg. von x abhängt! Also $\underline{F \equiv F(x)}$.

$$= \int_{x_a}^{x_b} dx \left\{ \int_{z_a(x)}^{z_b(x)} dz \left[\int_{y_a(x,z)}^{y_b(x,z)} dy\, \varphi(x,y,z) \right] \right\}$$

Im vorliegenden Beispiel läuft die x-Integration von $-R$ bis R, also $x_a = -R$ und $x_b = +R$. Dann für jedes feste $x \in [-R, +R]$ ist $z_{a,b}(x) = \mp\sqrt{R^2 - x^2}$ und $y_{a,b}(x,z) = \mp\sqrt{R^2-x^2-z^2}$

also: $$V = \int_{-R}^{+R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \cdot 1 =$$

$$= \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \left[z\right]_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = 2\int_{-R}^{+R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} dy \sqrt{R^2-x^2-y^2} =$$

(*)

$$\overset{\downarrow}{=} \int_{-R}^{R} dx \left[\frac{1}{2} y \sqrt{R^2-x^2-y^2} + \frac{1}{2}(R^2-x^2) \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} =$$

14-2

((Siehe Nebenrechnung))

$$= 2\int_{-R}^{R} dx \left\{ \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{0}}_{=0} + \frac{1}{2}(R^2-x^2)\underbrace{\arcsin\left(\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)}_{=\pi/2} \right.$$

$$\left. - \left[\underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{0}}_{=0} + \frac{1}{2}(R^2-x^2)\underbrace{\arcsin\left(\frac{-\sqrt{R^2-x^2}}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)}_{=-\pi/2}\right]\right\} =$$

$$= \pi \int_{-R}^{R} dx\,(R^2-x^2) = \pi\left[R^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R} =$$

$$= \pi\left[R^3 - \frac{1}{3}R^3 - \left(R^2(-R) - \frac{1}{3}(-R)^3\right)\right]$$

$$= \pi\left[2R^3 - \frac{2}{3}R^3\right] = \frac{4\pi}{3}R^3$$

Bronstein: $\int dx\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right]$

(*)

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}\right] + \frac{1}{2}a^2\left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

$a\int dx\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$

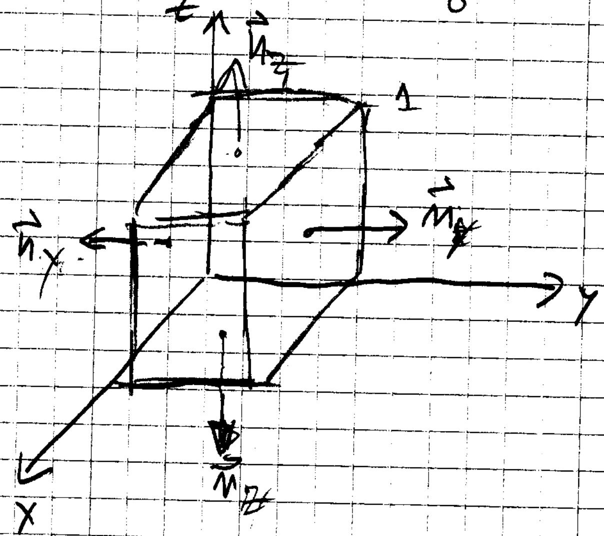
und dann

Subst.: $w = \frac{x}{a} \Rightarrow dw = \frac{dx}{a}$

P15

P15-1

Entsprechend den 6 Flächen gibts es hier 6 Integrale auszurechnen. Die Fläche in der xy-Ebene hat die Orientierung $\vec{e}_z$, entsprechend gilt also: $\vec{e}_z \cdot \vec{A} = z$, da $\vec{A} = (\underset{A_x}{x}, \underset{A_y}{x}, \underset{A_z}{z})$.



Für $z=0$ ist $\vec{e}_z \vec{A} = 0$

$$\curvearrowright \underline{\underline{I_z^{tot}}} = 0 + \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, (\vec{e}_z \cdot \vec{A})\Big|_{z=1} = \underline{\underline{1}} \curvearrowright \underline{\underline{I_z^{tot} = 1}}$$

Bei den $\vec{e}_y$-Flächen muß man aufpassen; hier ist $\vec{e}_y \cdot \vec{A} = x$

$$\curvearrowright \quad I_y = \int_0^1 dz \int_0^1 dx \, \underbrace{(\vec{e}_y \cdot \vec{A})}_{=x} = \frac{1}{2},$$

unabhängig davon, ob es für $y=0$ oder $y=1$ ausgewertet wird! Aufgrund der unterschiedlichen Orientierung der beiden $\vec{e}_y$-Flächen liefert die Integration in der xz-Ebene insgesamt keinen Beitrag.

$$\Rightarrow \underline{\underline{I_y^{tot} = 0}}$$

Bei $\vec{e}_x$-Flächen: $(\vec{e}_x \cdot \vec{A}) = x \curvearrowright \int_0^1 dy \int_0^1 dz \, \underbrace{(\vec{e}_x \cdot \vec{A})}_{x}\Big|_{x=1} = 1$, für $x=0$ ist $\vec{e}_x \cdot \vec{A} = 0$. $\Rightarrow \underline{\underline{I_x^{tot} = 1}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\iint_F \vec{A} \cdot d\vec{f}}} = \iint_F (\vec{A} \cdot \vec{n}) \, df = \sum_{j=1}^{6} I_j = \underline{\underline{2}}$$

Rechnung mittels Gauß'schen Satz: (P15-2)

$$\oint\!\!\oint_F \vec{A} \cdot d\vec{f} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, dV$$

Integral über die geschlossene Fläche = Integral über das darin enthaltene Volumen.

Berechnung von $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z = 1 + 0 + 1 = 2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 2}}$$

Also

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, dV = 2 \iiint_V dV = 2 \cdot \underbrace{\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz}_{=1} = 2$$

(Volumen eines Würfels mit Kantenlänge a: $V = a^3$; hier ist $a = 1 \Rightarrow V = 1$)

$$\Rightarrow \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, dV = 2 \quad \checkmark$$

P16 Direkte Berechnung des geschlossenen Kurvenintegrals:

Für die einzelnen Teilstücke ergibt sich:

$$I_{a\to b} = \left.\int_a^b dx \underbrace{(\vec{e}_x \cdot \vec{B})}_{\frac{1}{r^2} y}\right\} = 0 \text{ , da } y = 0 \Rightarrow \underline{\underline{I_{a\to b} = 0}}$$

$$I_{b\to c} = \int_0^c dy \underbrace{(\vec{e}_y \cdot \vec{B})}_{-x} \underset{\text{bei } x=b}{=} \int_0^c dy \frac{1}{r^2}(-b) \underset{r^2 = x^2+y^2}{=} \int_0^c dy \frac{-b}{b^2+y^2} =$$

$$\left[\text{Bronstein: } \int dx \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)\right]$$

$$= -\frac{1}{b}\int_0^c dy \frac{1}{1+\left(\frac{y}{b}\right)^2} \left.\right\} = -\frac{1}{\cancel{b}}\cancel{b}\int_0^{(c/b)} dw \frac{1}{1+w^2} = -\arctan\left(\frac{c}{b}\right)$$

Subst.: $w = \frac{y}{b} \Rightarrow dw = \frac{1}{b}dy$

$$\Rightarrow \underline{\underline{I_{b\to c} = -\arctan\left(\frac{c}{b}\right)}}$$

Die Auswertung der Integrale über die anderen Teilstücke verläuft ganz analog:

$$\underline{\underline{I_{b\to a}}} = \int_b^a dx \left.(\vec{e}_x \cdot \vec{B})\right|_{y=c} = \int_b^a dx \frac{c}{c^2+x^2} = \underline{\underline{\arctan\left(\frac{a}{c}\right) - \arctan\left(\frac{b}{c}\right)}}$$

$$\underline{\underline{I_{c\to a}}} = \int_c^0 dy \left.(\vec{e}_y \cdot \vec{B})\right|_{x=a} = \int_c^0 dy \left(-\frac{a}{a^2+y^2}\right) = \underline{\underline{\arctan\left(\frac{c}{a}\right)}}$$

Wir verwenden nun die Relation:

$$\arctan(x) + \arctan(x^{-1}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r}}} = I_{a\to b} + I_{b\to c} + I_{b\to a} + I_{c\to a} = \underline{\underline{0}}$$

Über Stoke'schen Satz:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \iint_{F_C} (\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot d\vec{f}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \Big(\underset{0}{\cancel{\partial_y B_z}} - \underset{0}{\cancel{\partial_z B_y}},\ \underset{0}{\cancel{\partial_z B_x}} - \underset{0}{\cancel{\partial_x B_z}},\ \partial_x B_y - \partial_y B_x\Big)$$

$$\partial_x B_y = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{-x}{x^2+y^2}\right\} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_y B_x$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{0}}} \quad \checkmark$$