Prof. Mosel Wintersemester 2007/2008
Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

Präsenzaufgaben für den 17.12.2007

P21. Rechnen mit imaginären Zahlen
Mit dem Symbol i bezeichnet man die Einheit der *imaginären* Zahlen. Sie ist definiert dadurch, daß ihr Quadrad stets eine *negative* reelle Zahl ist, also: $i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$.
Berechnen Sie: $(-i)^3,\ i^{15},\ \sqrt{4(-25)}$.

P22. Rechnen mit komplexen Zahlen
Gegeben seien die *komplexen* Zahlen $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = e^{1/2+\pi i}$ und $z_4 = e^{3-i}$.

(a) Berechnen Sie das Produkt $z = z_1 z_2$.

(b) Geben Sie die *konjugiert* komplexen Zahlen z_1^*, z_2^*, z_3^*, z_4^* an.

(c) Geben Sie den Real- und Imaginärteil von $z_{1,2}$ an und berechnen Sie den Real- und Imaginärteil von $z_{3,4}$.

(d) Berechnen Sie: $\ln(z_1)$.

P23. Taylor-Entwicklung
Kennt man die Funktion $f(x)$ und alle ihre Ableitungen an der Stelle $x = x_0$, so kann man sich die Funktionswerte in der Umgebung von x_0 mit der *Taylor-Entwicklung* dieser Funktion um x_0 beschaffen. Die Taylor-Entwicklung von $f(x)$ um x_0 ist wie folgt definiert:

$$f(x) := f(x_0) + \frac{1}{1!}\frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}\bigg|_{x=x_0}(x - x_0)^2 + \cdots \quad , \qquad (1)$$

oder ganz allgemein

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \text{mit} \quad f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)\bigg|_{x=x_0} \quad . \qquad (2)$$

(a) Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung um $x_0 = 0$ für die Exponentialfunktion e^x.

(b) *Näherungswerte* für eine Funktion $f(x)$ erhält man dadurch, daß man die Taylor-Entwicklung *nur* bis zu einer bestimmten Ordnung durchführt. Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung (bis zur 4. Ordnung) um $x_0 = 0$ für $\ln(1 + x)$ und $\tan(x)$.

Bitte Wenden!

Hausaufgaben für den 07.01.2008

H16. (4 Punkte)
Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung (bis zur 4.Ordnung) um $x_0 = 0$ für die Funktion $f(x) = (1+x)^a$ allgemein und für die Spezialfälle $a = \pm\frac{1}{2}$.

H17. (6 Punkte)
Gegeben sei folgendes Potential (mit positiven Konstanten V_0, x_0, d):

$$V(x) = V_0 \left(1 - e^{-\frac{(x-x_0)^2}{d^2}} \right) \quad . \tag{3}$$

(a) Skizzieren Sie das Potential.

(b) Zeigen Sie, daß dieses Potential für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage durch das Potential eines *harmonischen Oszillators* angenähert werden kann.

(c) Zeigen Sie, daß für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage die Bewegungsgleichung in folgender Form gebracht werden kann

$$\ddot{\hat{x}} + \omega^2 \hat{x} = 0 \tag{4}$$

und geben Sie explizit $\hat{x}$ und ω an.

Das MMP-Team wünscht allen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr!