1. Klausur zur Mechanik — WS 01/02

1: Ein Teilchen der Masse m kann sich entlang der x-Achse bewegen. Auf das Teilchen wirkt die Kraft $F(x) = -bx + c$ mit den Konstanten $b > 0$ und c. Es befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $x_0 = c/b$ und besitzt die Geschwindigkeit v_0. 12

a) Berechnen Sie das zugehörige Potential $V(x)$.
b) Geben Sie die Gesamtenergie des Teilchens an.
c) Bestimmen Sie $x(t)$ aus dem Energiesatz.
d) Berechnen Sie $v(t) = \dot{x}(t)$ und $a(t) = \ddot{x}(t)$.
Hinweis:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-Ax^2 + Bx + C}} = -\frac{1}{\sqrt{A}} \arcsin \frac{-2Ax + B}{\sqrt{4AC + B^2}}$$

für positive Konstanten A, B, C.

2: Ein Teilchen der Masse m bewegt sich entlang der z-Achse. Auf das Teilchen wirkt eine Kraft, die der Teilchenbewegung entgegenwirkt, proportional zur Geschwindigkeit des Teilchens ist und zudem mit der Zeit linear steigt, d.h. 8

$$F = -cvt$$

mit einer positiven Konstanten c. Das Teilchen besitzt zum Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit v_0. Bestimmen Sie $v(t)$ durch Separation der Variablen v und t.

3: Ein Teilchen bewege sich entlang einer Bahnkurve ($t \geq 0$)

$$\vec{r}(t) = \left(\left(\frac{t}{t_0}\right)^2, 0, e^{-2t/t_0} \right).$$

a) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$. 10
b) Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\vec{\tau} = \vec{v}/|\vec{v}|$.
c) Berechnen Sie den Normaleneinheitsvektor. Hinweis: Er ist proportional zu $\dot{\vec{\tau}}$ und auf Eins normiert.

4: Gegeben seien folgende Kraftfelder:

$$\vec{F}_1(\vec{r}) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

und

$$\vec{F}_2(\vec{r}) = \left(\frac{y}{r}, \frac{z}{r}, \frac{x}{r}\right)$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Welches davon ist konservativ? Berechnen Sie für beide Kräfte die Arbeit, die jeweils erforderlich ist, um eine Masse m entlang der Kurve $\vec{r}(t) = (r_0 \sin t, r_0 \cos t, 0)$ von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ zu verschieben. 12 Dabei ist r_0 eine positive Konstante. Bestimmen Sie für das konservative Kraftfeld das zugehörige Potential.

5: Ein Teilchen mit Masse m hängt an einer Feder mit Federkonstanten k. Zudem wirkt die Schwerkraft auf das Teilchen. Das Potential ist also

$$V(z) = \frac{1}{2}kz^2 + mgz.$$

a) Bestimmen Sie die zugehörige Kraft.
b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.
c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit dem Ansatz 8

$$z(t) = A\cos(\omega t + \alpha) + \bar{z},$$

d.h. bestimmen Sie ω und $\bar{z}$.
d) Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Teilchen bei $z = 0$ und ist in Ruhe. Bestimmen Sie A und α.