H24

Lösungen zu Theoretische Mechanik - ~~Blatt 2~~

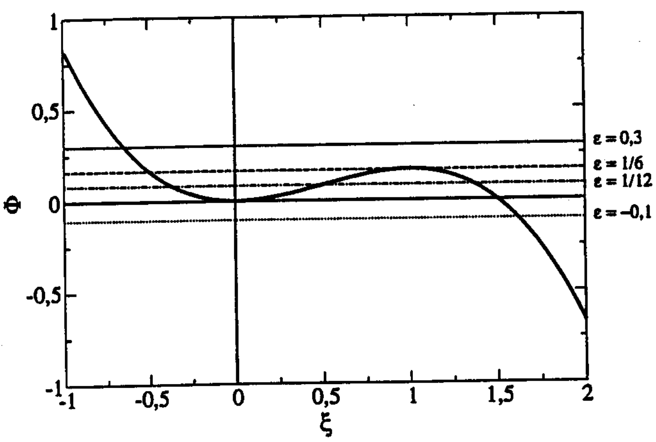
Das zur Kraft $F(x) = -kx + \alpha x^2$ gehörige Potential lautet: $V(x) = \frac{k}{2}\,x^2 - \frac{\alpha}{3}\,x^3$.
Extrema befinden sich bei: $x_1 = 0\,; \quad x_2 = \frac{k}{\alpha}$.
Potential besitzt relatives Minimum bei $x_1 = 0$ und relatives Maximum bei $x_2 = k/\alpha$
Es ist $V(x_1 = 0) = 0$ und $V(x_2 = k/\alpha) = V_{max} = k^3/6\alpha^2$ (siehe auch Abbildung 1).
Das Teilchen kehrt *nicht* wieder zum Ursprung zurück, falls seine Energie größer als V_{max} ist, also:

$$E = \frac{m}{2}\,v_0^2 \geq V_{max} = \frac{k^3}{6\alpha^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 \geq +\sqrt{\frac{k^3}{3m\alpha^2}}}$$

Im Falle des anderen Vorzeichens von v_0 kehrt das Teilchen nach Reflexion am Potential (bei einem $x < 0$) *einmal* zurück und läuft dann nach $+\infty$.

Darstellung von V(x) in dimensionslosen Einheiten

$\Phi(\xi)$

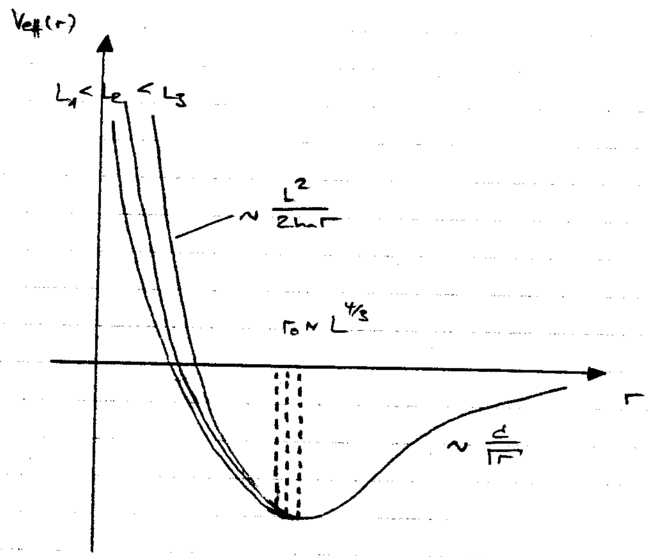


H25 -1

(a) V ist Zentralpotential $\Rightarrow$ Drehimpuls ist Erhaltungsgröße !

V ist zeitunabhängig $\Rightarrow$ Energie ist Erhaltungsgröße !

(b) $$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{c}{\sqrt{r}} \quad , c > 0$$



(c) Eine stabile Kreisbahn gibt es nur im Minimum des effektiven Potentials $V_{eff}(r)$.

$$\frac{d}{dr} V_{eff}(r) \Big|_{r=r_0} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{1}{2}\frac{c}{r^{3/2}} \Big|_{r=r_0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{c}{r_0^{3/2}} = \frac{L^2}{mr_0^3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r_0 = \left(\frac{2L^2}{mc}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{4L^4}{m^2c^2}}}}$$

(d) Kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage r_0

$\rightsquigarrow$ Taylor-Entwicklung des effektiven Potentials um r_0

$$V_{eff}(r)\Big|_{r=r_0} = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{c}{r_0^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dr} V_{eff}(r) \bigg|_{r=r_0} = -\frac{L^2}{m r^3} + \frac{1}{2}\frac{c}{r^{3/2}} \bigg|_{r=r_0} = 0$$

$$\frac{d^2}{dr^2} V_{eff}(r) \bigg|_{r=r_0} = 3\frac{L^2}{m r^4} - \frac{3}{4}\frac{c}{r^{5/2}} \bigg|_{r=r_0} = 3\frac{L^2}{m r_0^4} - \frac{3}{4}\frac{c}{r_0^{5/2}}$$

Somit lautet für kleine Auslenkungen die Näherung an das Potential

$$V_{eff}(r) = \left(\frac{L^2}{2m r_0^2} - \frac{c}{r_0^{1/2}}\right) + \frac{1}{2}\left(3\frac{L^2}{m r_0^4} - \frac{3}{4}\frac{c}{r_0^{5/2}}\right)\cdot (r-r_0)^2 + \mathcal{O}(r^3)$$

Daraus ergibt sich die Kraft:

$$F_{eff}(r) = -\frac{d}{dr} V_{eff}(r) \approx -\left(3\frac{L^2}{m r_0^4} - \frac{3}{4}\frac{c}{r_0^{5/2}}\right)(r-r_0)$$

man erhält für die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen

$$m\ddot{r} = F_{eff}(r) = -\left(3\frac{L^2}{m r_0^4} - \frac{3}{4}\frac{c}{r_0^{5/2}}\right)(r-r_0)$$

$$\tilde{r} = r - r_0 \Rightarrow \dot{\tilde{r}} = \dot{r} \Rightarrow \ddot{\tilde{r}} = \ddot{r}$$

$$\Rightarrow \ddot{\tilde{r}} + \frac{1}{m}\left(3\frac{L^2}{m r_0^4} - \frac{3}{4}\frac{c}{r_0^{5/2}}\right)\tilde{r} = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{r}(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$\text{mit } \omega^2 = \frac{1}{m}\left(3\frac{L^2}{m r_0^4} - \frac{3}{4}\frac{c}{r_0^{5/2}}\right) = \frac{3}{m r_0^{5/2}}\Big(\underbrace{\frac{L^2}{m r^{3/2}}}_{\frac{1}{2}c \text{ (siehe c))}} - \frac{1}{4}c\Big)$$

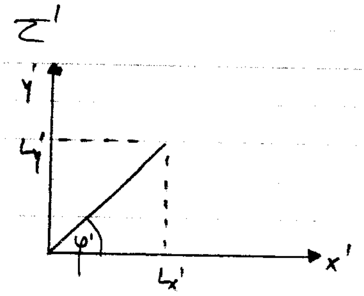
$$= \frac{3}{m r_0^{5/2}}\frac{1}{4}c > 0$$

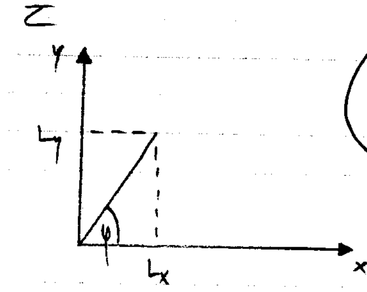
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3c}{4 m r_0^{5/2}}}$$

Somit führt das Teilchen eine harmonische Schwingung um r_0 aus mit Frequenz ω:

$$r(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + r_0$$

H26





Stab der Länge L' ruht in Σ', Σ' bewegt sich mit Geschwindigkeit v in Σ.

(a) Länge L' in Σ': $\quad L' = \sqrt{L_x'^2 + L_y'^2}$

Beim Übergang / Transformation in das Bezugsystem Σ wird die x'-Komponente lorentzkontrahiert$^{\circledast}$, da $\vec{e}_x' \parallel \vec{v}$, die $\vec{y}'$-Komponente bleibt unverändert, da $\vec{e}_y' \perp \vec{v}$

$^{\circledast}$(und zwar mit der "üblichen Lorentzkontraktion")

$$\rightarrow \quad L_x = \frac{1}{\gamma} L_x' \leq L_x' \quad , \quad L_y = L_y'$$

Somit erhält man für die Länge L im Bezugsystem Σ:

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} L_x'^2 + L_y'^2} = \sqrt{\underbrace{L_x'^2 + L_y'^2}_{L'^2} - \beta^2 L_x'^2} \leq L'$$

(b) Der Winkel φ' in Σ' ist gegeben über:

$$\varphi' = \arctan\left(\frac{L_y'}{L_x'}\right)$$

Mit obiger Betrachtung ($L_x = \frac{1}{\gamma} L_x'$, $L_y = L_y'$) erhält man für den Winkel φ im Bezugsystem Σ

$$\varphi = \arctan\left(\frac{L_y}{L_x}\right) = \arctan\left(\frac{L_y'}{\frac{1}{\gamma} L_x'}\right) = \arctan\left(\gamma \cdot \frac{L_y'}{L_x'}\right) \geq \varphi'$$

[da $\gamma \frac{L_y'}{L_x'} \geq \frac{L_y'}{L_x'}$ und $\arctan(x)$ streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$]