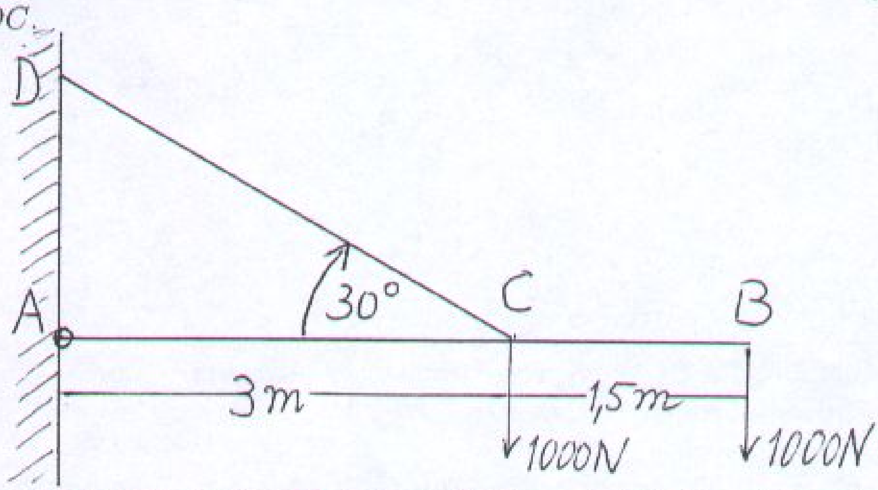
1. Klausur zur Vorlesung Mechanik I

6.12.04

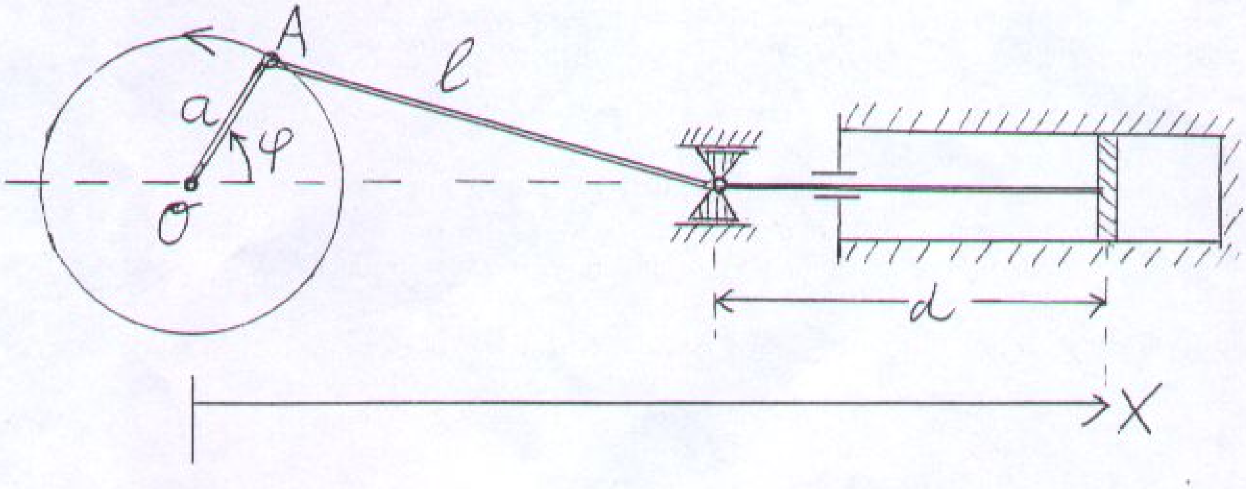
Bearbeiten Sie bitte jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt und vergessen Sie nicht, Ihren Namen darauf zu schreiben.

5P 1) Bestimmen Sie den kürzesten Abstand des Punktes $(3,2,1)$ von der durch die Punkte $(1,1,0)$, $(3,1,-1)$ und $(-1,0,2)$ definierten Ebene.

6P 2) Ein horizontaler, gewichtsloser Balken AB, der an einem Gelenk am Punkt A an einer vertikalen Wand hängt und mit einem gewichtslosen Stahlseil DC verbunden ist, ist wie gezeigt mit zwei Lasten von je 1000 N belastet. Bestimmen Sie die Komponenten der Reaktionskraft in A und die Seilspannung in DC.



7P 3) Der Endpunkt A einer Kurbel mit Radius a dreht sich mit konstanter Geschwindigkeit v entgegen dem Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung. Berechnen Sie den Ort x, die Geschwindigkeit $\dot{x}$ und die Beschleunigung $\ddot{x}$ des Kolbens als Funktion der Zeit t. Setzen Sie $x(t=0) = a + \ell + d$. Skizzieren Sie x in Abhängigkeit von t mit $v = 2\pi a\ \text{s}^{-1}$, $a = 0,2$ m, $\ell = 0,6$ m und $d = 0,5$ m.



10P

4) Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\vec{e}_T$, den Normaleneinheitsvektor $\vec{e}_N$, den Krümmungsradius R, die Krümmung κ und die Torsion τ der durch $\vec{r} = at\vec{e}_x + \frac{bt^2}{2}\vec{e}_y + ct\vec{e}_z$ gegebenen Raumkurve $(a, b, c \geq 0)$. Wie groß ist die Bahnlänge s, wenn die Raumkurve bei $\vec{r} = 0$ startet und $t \geq 0$ ist?
Hilfe: $\int \sqrt{1+x^2}\, dx = (1/2)\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$.

10P

5) Bipolare Koordinaten u, v und z sind orthogonale Koordinaten und definiert als $(a \geq 0)$

$$x = \frac{a \sinh v}{\cosh v - \cos u}\,, \quad y = \frac{a \sin u}{\cosh v - \cos u}\,, \quad z = z\,.$$

Hierbei ist $0 \leq u < 2\pi$, $-\infty < v < \infty$, $-\infty < z < \infty$.
a) Zeigen Sie, daß die Koordinatenflächen mit $u = const$ und $v = const$ durch die Beziehungen

$$x^2 + (y - a\cot u)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 u}\,, \quad z = z \tag{1}$$

und

$$(x - a\coth v)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sinh^2 v}\,, \quad z = z \tag{2}$$

gegeben sind.
b) Schneiden Sie die beiden Koordinatenflächen $u = const$ und $v = const$ jeweils mit der Koordinatenfläche $z = 0$. Welche Schnittkurven erhalten Sie in der xy-Ebene?
c) Zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung (1), daß sich alle Koordinatenlinien mit $u = u_0$ und $z = z_0$ in den Punkten $(a, 0, z_0)$ und $(-a, 0, z_0)$ schneiden. Dies sind singuläre Punkte. Welche Werte hat in diesen Punkten die Koordinate v?
d) Was heißt „orthogonale Korrdinaten"?

7P

6) Zeigen Sie, daß die Divergenz in Kugelkoordinaten wie folgt gegeben ist

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\,.$$

Benutzen sie dazu den $\vec{\nabla}$-Operator in Kugelkoordinaten.

6P

7) Berechnen Sie den Gesamtstrom aus einer Kugel mit Radius a um den Koordinatenursprung, wenn die Stromdichte $\vec{j} = c\vec{r} + \vec{j}_0$ ist, wobei c eine positive Konstante bezeichnet und $\vec{j}_0$ eine konstante Stromdichte ist.

Nikolaus wünscht Ihnen eine erfolgreiche Klausur!