H6

Zeige: Die Divergenz eines Rotationsfeldes ist immer gleich 0

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

$$= \sum_i \partial_i \cdot \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]_i$$

$$= \sum_i \partial_i \cdot \left[\sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j A_k\right]$$

$$= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_i \partial_j A_k = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \partial_i A_k$$

$$= -\sum_{ijk} \varepsilon_{jik}\, \partial_j \partial_i A_k = -\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_i \partial_j A_k$$

$$= -\sum_i \partial_i \left[\sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j A_k\right]$$

$$= -\,\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{A})$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = 0$$

H 7

$$\operatorname{rot}\left[F(r)\vec{r}\right] \overset{\uparrow}{=} \vec{\nabla} \times F(r)\vec{r} \quad \overset{!}{\circ}$$

Def. der Rotation

Im Indexkalkül:

$$\left[\vec{\nabla} \times F(r)\vec{r}\right]_i \overset{\uparrow}{=} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \left\{F(r)\, r_k\right\} = (\ast)$$

1) Def. des Vektorproduktes

2) Beachte: Man darf $F(r)$ nicht vor den Differential-operator vorziehen, da ∂_j auf beide, also auf $F(r)$ und $\vec{r}$ noch wirkt!

$$(\ast) \overset{\uparrow}{=} \varepsilon_{ijk}\left[\left(\partial_j F(r)\right) r_k + F(r)\, \partial_j r_k\right] =$$

Produktregel

$$\partial_i f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{r_i}{r}\,;\ \partial_j r_k \overset{!}{=} \delta_{jk}$$

$$= \varepsilon_{ijk}\left[\frac{\partial F(r)}{r\,\partial r}\, r_j r_k + F(r)\, \delta_{jk}\right] =$$

$$= \frac{\partial F(r)}{r\,\partial r}\, \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, r_j r_k}_{=0,\ \text{da}} + \underbrace{F(r)\, \varepsilon_{ijk}\, \delta_{jk}}_{=0,\ \text{da}\ \varepsilon_{ikk}=0} = 0 \quad \checkmark$$

ε_{ijk} antisymmetrisch und $r_j r_k$ symmetrisch bei Vertauschung.

P17 $\vec{F} = (2axy, \; bx^2 + cy^2, \; 0)$

H8

a) Divergenz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{d}{dx} F_x + \frac{d}{dy} F_y + \frac{d}{dz} F_z$$

$$= 2ay + 2cy = 2y(a+c)$$

$\leadsto$ quellenfrei für $a = -c$

Rotation

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_x = \frac{d}{dy} F_z - \frac{d}{dz} F_y = 0 - 0 = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_y = \frac{d}{dz} F_x - \frac{d}{dx} F_z = 0 - 0 = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_z = \frac{d}{dx} F_y - \frac{d}{dy} F_x = 2bx - 2ax = 2x(a-b)$$

$\leadsto$ wirbelfrei für $a = b$