H16

Taylor - Entwicklung von $f(x) = (1+x)^a$ um $x=0$ [bis 4. Ordnung]

$$f(x) = (1+x)^a \quad \rightarrow \quad f(x)\big|_{x=0} = 1$$

$$f'(x) = a(1+x)^{a-1} \quad \rightarrow \quad f'(x)\big|_{x=0} = a$$

$$f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2} \quad \rightarrow \quad f''(x)\big|_{x=0} = a(a-1)$$

$$f'''(x) = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3} \quad \rightarrow \quad f'''(x)\big|_{x=0} = a(a-1)(a-2)$$

$$f''''(x) = a(a-1)(a-2)(a-3)(1+x)^{a-4} \quad \rightarrow \quad f''''(x)\big|_{x=0} = a(a-1)(a-2)(a-3)$$

$$\Rightarrow \quad (1+x)^a = \underline{1+ax} + \tfrac{1}{2}a(a-1)x^2 + \tfrac{1}{6}a(a-1)(a-2)x^3 + \tfrac{1}{24}a(a-1)(a-2)(a-3)x^4 + \mathcal{O}(x^5)$$

Insbesondere ergibt sich für $a = 1/2$

$$a=\tfrac{1}{2}: \quad \sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)x^2 + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)x^3 + \tfrac{1}{24}\cdot\tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\left(-\tfrac{5}{2}\right)x^4 + \mathcal{O}(x^5)$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}x - \underbrace{\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}}_{1/8}x^2 + \underbrace{\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}}_{1/16}x^3 - \underbrace{\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}}_{5/128}x^4 + \mathcal{O}(x^5)$$

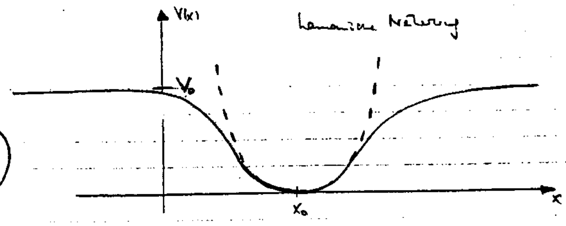
und für $a = -1/2$:

$$a=-\tfrac{1}{2}: \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)x^2 + \tfrac{1}{6}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\left(-\tfrac{5}{2}\right)x^3 + \tfrac{1}{24}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{3}{2}\right)\left(-\tfrac{5}{2}\right)\left(-\tfrac{7}{2}\right)x^4 + \mathcal{O}(x^5)$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}x + \underbrace{\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}}_{3/8}x^2 - \underbrace{\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}}_{5/16}x^3 + \underbrace{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}}_{35/128}x^4 + \mathcal{O}(x^5)$$

H17

(a)



Potential : $V(x) = V_0 \left[1 - e^{-\left(\frac{x-x_0}{d}\right)^2} \right]$

(b) Taylor-Entwicklung des Potentials um x_0:

- $V(x)\Big|_{x=x_0} = V_0 \left[1 - e^{0} \right] = 0$

- $\frac{d}{dx} V(x) = V_0 \cdot \frac{1}{d^2} \cdot 2(x-x_0) \cdot e^{-\frac{1}{d^2}(x-x_0)^2}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} V(x)\Big|_{x=x_0} = 0$

[klar, da an x_0 das Minimum des Potentials liegt !]

- $\frac{d^2}{dx^2} V(x) = 2V_0 \frac{1}{d^2} e^{-\frac{1}{d^2}(x-x_0)^2} - 2V_0 \frac{1}{d^2}\frac{1}{d^2}(x-x_0) \cdot 2(x-x_0)\, e^{-\frac{1}{d^2}(x-x_0)^2}$

$= 2V_0 \frac{1}{d^2} e^{-\frac{1}{d^2}(x-x_0)^2} \left[1 - 2\frac{1}{d^2}(x-x_0)^2 \right]$

$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} V(x)\Big|_{x=x_0} = 2V_0 \frac{1}{d^2}$

Somit läßt sich das Potential in der Umgebung des Minimums x_0 näherungsweise darstellen als :

$$V(x) = 0 + \frac{1}{1}\cdot 0 \cdot (x-x_0) + \frac{1}{2}\cdot\left(2V_0 \frac{1}{d^2}\right)\cdot(x-x_0)^2 + O(x^3)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x) = V_0 \frac{1}{d^2}(x-x_0)^2 + O(x^3)}$$

Man erhält also als Näherung in niedrigster nichtverschwindender Ordnung das Potential eines (verschobenen) harmonischen Oszillators!

(c) Zugehörige Kraft für $\tilde{V}(x) = V_0 \frac{1}{d^2}(x-x_0)^2$

$\tilde{F}(x) = -\frac{d}{dx}\tilde{V}(x) = -2V_0 \frac{1}{d^2}(x-x_0)$

$\Rightarrow$ In der Nähe des Potentialminimums gilt die folgende Bewegungsgleichung

$m\ddot{x} = -2V_0 \frac{1}{d^2}(x-x_0)$

Führe neue, verschobene Koordinate ein $\boxed{\bar{x} = x - x_0}$

$\Rightarrow \dot{\bar{x}} = \dot{x}, \quad \ddot{\bar{x}} = \ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{\bar{x}} + \frac{2V_0}{md^2}\bar{x} = 0$

Lösung davon ist eine harmonische Bewegung mit $\boxed{\text{Kreisfrequenz } \omega = \sqrt{\frac{2V_0}{md^2}}}$

$\Rightarrow \bar{x}(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$

$\Rightarrow x(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t) + x_0$