Prof. Mosel — Wintersemester 2007/2008
Übungen zu “Mathematische Methoden der Physik”

Präsenzaufgaben für den 26.11.2007

P17. Fallendes Seil
Ein ausgestrecktes Seil der Masse m und der Länge l gleite über eine Tischkante ab. Die Reibung des Seils sei vernachlässigbar, und das Seil setzt Biegungen keinen Widerstand entgegen.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

(b) Zeigen Sie, daß die Energie erhalten ist.

(c) Lösen Sie mit Hilfe der Energieerhaltung die Bewegungsgleichung für den Fall, daß das Seil zur Zeit $t = 0$ losgelassen wird, wobei ein Stück x_0 vom Tisch herabhängt.

P18. Raketenantrieb-I
Eine Rakete startet zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe und fliege dann senkrecht zur Erde in die Höhe. Das Schwerefeld der Erde sei für den gesamten Flug konstant. Die Masse der Rakete ist aber aufgrund des Treibstoffausstosses nicht konstant, sondern nimmt von ihrem anfänglichen Wert $m_0 + m_T$ kontinuierlich ab, bis der gesamte Treibstoff aufgebraucht ist und die Rakete eine Masse m_0 hat. Vernachlässigt man Reibungseffekte, so ergibt sich die Bewegungsgleichung zu

$$m(t)\ddot{x}(t) = -m(t)g - u\dot{m}(t) \quad , \tag{1}$$

wobei $x(t)$ die Steighöhe der Rakete ist, g die Erdbeschleunigung und $u = konst.$ die Ausströmgeschwindigkeit des Antriebgases relativ zur Rakete. Unter der Annahme einer zeitabhängigen Massenabnahme gemäß

$$m(t) = m_0 + \frac{m_T}{1 + \frac{t}{\tau_0}}, \quad \tau_0 > 0 \tag{2}$$

(a) berechnen Sie die Geschwindigkeit der Rakete $v(t) = \dot{x}(t)$ als Funktion der Zeit.
Hinweis: Fassen Sie dazu Gleichung (1) als Differentialgleichung für die Geschwindigkeit auf und integrieren sie diese direkt mittels Separation der Variablen. Folgendes Integral wird noch gebraucht: $\int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$.

(b) Wie groß wäre die Endgeschwindigkeit v_E im Kräftefreien ($g = 0$) Fall, nachdem der gesamte Treibstoff aufgebraucht ist?

(c) Wie groß muß das Verhältnis $\frac{m_T}{m_0}$ sein, um eine vorgegebene Endgeschwindigkeit v_E zu erreichen?

Bitte Wenden!

Hausaufgaben für den 03.12.2007

H13. Raketenantrieb-II(4 Punkte)
Der Raketenantrieb (P18) soll weiter bearbeitet werden. Im Gegensatz zu P18(a) betrachten Sie jetzt den Fall eines *konstanten* Massenverlustes, d.h. die Masse nimmt *linear* in der Zeit t_E von $m_0 + m_T$ auf m_0 gemäß

$$m(t) = m_0 + \left(1 - \frac{t}{t_E}\right) m_T \tag{3}$$

ab.

(a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.
Hinweis: Zur Bestimmung von $v(t)$ ist das Integral wesentlich einfacher als in P18 auszuwerten. Hier brauchen Sie nur, den Integranden auf die Form $\frac{1}{a-x}$ zu bringen.

(b) Wie groß wäre die Endgeschwindigkeit v_E im Kräftefreien ($g = 0$) Fall, nachdem der gesamte Treibstoff aufgebraucht ist?

(c) Wie groß muß das Verhältnis $\frac{m_T}{m_0}$ sein, um eine vorgegebene Endgeschwindigkeit v_E zu erreichen?

H14. Bewegung einer Lokomotive mit Reibung(4 Punkte)
Eine Lokomotive der Masse m bewege sich antriebslos unter dem Einfluß der Reibungskraft $\vec{F}(v) = -(\alpha + \beta v^2)\vec{e}_x$ (α und β seien konstante Koeffizienten) auf einer waagerechten Schiene. Es wirken keine anderen Kräfte auf die Lokomotive. Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ sei v_0.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

(b) Nach welcher Zeit kommt die Lokomotive zum Stillstand?
Hinweis: Fassen Sie die Bewegungsgleichung aus Teil (a) als Differentialgleichung für die Geschwindigkeit auf und integrieren Sie diese mittels Separation der Variablen. Folgendes Integral werden Sie dabei brauchen: $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})$.

(c) Wie lange dauert es im Grenzfall $v_0 \longrightarrow \infty$, bis die Lokomotive zum Stillstand kommt?