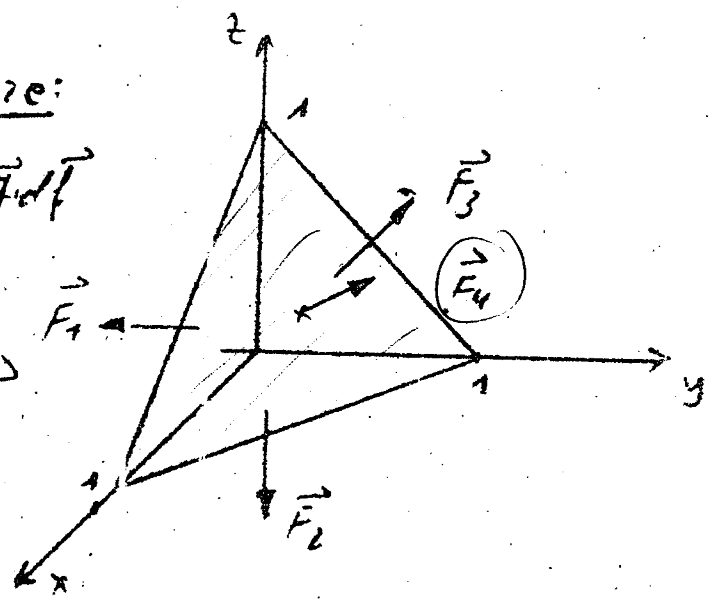
A11

(a) Mit $\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(-xz) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2) = 0$

folgt : $\iiint_V \operatorname{div}\vec{A}\,dV = \iint_F \vec{A}\cdot d\vec{f} = 0$ ✓

Skizze:



$$\iint_F \vec{A}\cdot d\vec{f} = \sum_{i=1}^{3} \iint_{F_i} \vec{A}\cdot d\vec{f} + \iint_{F_4} \vec{A}\cdot d\vec{f}$$

$$\rightarrow \iint_{F_4} \vec{A}\cdot d\vec{f} = \overbrace{\iint_F \vec{A}\cdot d\vec{f}}^{0} - \sum_{i=1}^{3} \iint \vec{A}\cdot d\vec{f}$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} \iint \vec{A}\cdot d\vec{f}$$

F_1 : $I_1 = \iint_{F_1} \vec{A}\cdot d\vec{f} = -\iint_{F_1} yz\,dy\,dz\Big|_{y=0} = 0$

F_2 : $I_2 = \iint_{F_2} \vec{A}\cdot d\vec{f} = -\iint_{F_2} (x^2+y^2)\,dx\,dy = -\iint_{F_2} x^2\,dx\,dy - \iint_{F_2} y^2\,dy\,dx$

$$= -\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1-y} x^2\,dx\,dy - \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} y^2\,dy\,dx = -2\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{1-y} x^2\,dx\,dy = -\frac{2}{3}\int_{y=0}^{1}(1-y)^3\,dy$$

$$\overset{u=1-y}{=} \frac{2}{3}\int_{u=1}^{0} u^3\,du = -\frac{2}{3}\int_{0}^{1} y^3\,dy = -\frac{1}{6}$$

F_3 : $I_3 = \iint_{F_3} \vec{A}\cdot d\vec{f} = -\iint_{F_3} (-xz)\,dy\,dz\Big|_{x=0} = 0 \rightarrow \boxed{\iint_{F_4} \vec{A}\cdot d\vec{f} = \frac{1}{6}}$

H12

Berechne zunächst $\vec{\nabla} \times \, = 2\vec{a}$ (aufgrund dieser Beziehung nennt man Felder wie $\vec{V}$ auch Rotorfelder). Da nun die von C umschlossene Fläche in z-Richtung orientiert und der Integrand des Flächenintegrals in der Stokes-Formel konstant ist (nämlich $2a_z$), findet man als Resultat

$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{V} = 2a_z .$$

Der außerdem gesuchte Fluss von $\vec{V}$ durch die Einheitskugel verschwindet nach Gauss; Rotorfelder sind nämlich divergenzfrei.

Bemerkung: Berechnung der Rotation kann direkt berechnet werden, z. B. für x-Komponent:

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{(\vec{\nabla} \times \vec{B})_x}} &= \partial_y B_z - \partial_z B_y \\ B_z &= a_x y - a_y x \\ B_y &= a_z x - a_x z \end{aligned}\right\} = \partial_y (a_x y - a_y x) - \partial_z (a_z x - a_x z) =$$

$$= a_x - 0 - 0 + a_x = \underline{\underline{2a_x}}$$; analog für y & z-Komp.

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = 2\vec{a} \quad \text{mit } \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$