Prof. Mosel **Wintersemester 2007/2008**
Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

Präsenzaufgaben für den 22.10.2007

P1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{b} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$ und $\vec{c} = 5\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ in der kartesischen Basis.

(a) Berechnen Sie für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ihre Beträge $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$.

(b) Berechnen Sie folgende Skalar- und Vektorprodukte: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$.

(c) Verifizieren Sie anhand der hier angegebenen Vektoren die allgemeine Beziehung:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad . \tag{1}$$

P2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1,\ 2,\ 3)$ und $\vec{b} = (-2,\ 4,\ -2)$ in der kartesischen Basis.

(a) Sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander?

(b) Finden Sie einen zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orhogonalen Vector $\vec{c}$.

(c) Falls $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ orthogonal zueinander sind, konstruieren Sie aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ neue Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ so, dass sie den Betrag 1 haben und in Richtung von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zeigen.

P3. Ein Vektor $\vec{b}$ läßt sich in einem zu einem Vektor $\vec{a}$ parallelen Anteil $\vec{b}_{||}$ und einen zu $\vec{a}$ senkrechten Anteil $\vec{b}_s$ zerlegen:

$$\vec{b}_{||} = \frac{\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{a})}{a^2}, \quad \vec{b}_s = \frac{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})}{a^2} \quad . \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $\vec{b}_{||}$ und $\vec{b}_s$ orthogonal zueinander sind und berechnen Sie folgende Ausdrücke: $\vec{a} \cdot \vec{b}_{||}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}_s$, $\vec{b}_{||} + \vec{b}_s$.

Bitte Wenden!

Hausaufgaben für den 29.10.2007

H1. (4 Punkte) Gegeben seien die zwei Vektoren:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

(a) Berechnen Sie $\vec{A}+\vec{B}$, $\vec{A}-\vec{B}$, $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$, sowie das Skalarprodukt $\vec{A}\cdot\vec{B}$ und das Vektorprodukt $\vec{A} \times \vec{B}$.

(b) Wie groß ist der Abstand d zwischen den durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$ definierten Punkten?

H2. (4 Punkte) Betrachten Sie wieder die Vektoren $\vec{b}_{||,s}$ aus P3. Zeigen Sie, dass ein nochmaliges Anwenden der senkrechten (bzw. parallelen) Projektionsvorschrift auf den Vektor $\vec{b}_s$ (bzw. $\vec{b}_{||}$) das gleiche Resultat wie das der ersten Projektion ergibt.

H3. (4 Punkte)

(a) Verifizieren Sie folgende nützliche Relation: $\epsilon_{ijm}\epsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$

(b) Beweisen Sie die Relation: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$, und zwar im Indexkalkül und mit Hilfe der Relation aus Teil (a).