Klausur zur Vorlesung Mechanik I
19.02.04

Armin Bunde, Wintersemester 2003

Dauer: 3 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel:
Vorlesungsmitschrift und Übungen aus WS 03/04, Taschenrechner.
Gesamtpunktzahl: 80 Punkte **(5 Aufgaben)**
Bestanden ab 40 erreichten Punkten.

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt!

Aufgabe 1: (15 Punkte):

Gegeben seien zwei Kraftfelder $\vec{F_1}(x, y, z) = (5x^2 + 2y,\ 3y^2z + 2x,\ y^3)$ und $\vec{F_2}(x, y, z) = (5x^2 + 2y^2,\ y + 2x,\ y^2)$

a) Eines dieser Kraftfelder besitzt ein Potenzial. Welches? Begründen Sie Ihre Antwort. (6 Punkte)

b) Bestimmen Sie das Potenzial dieses Kraftfeldes, indem Sie über einen geeigneten Weg das Linienintegral über das Kraftfeld vom Punkt $O = (0, 0, 0)$ zum Punkt (x, y, z) berechnen. (6 Punkte)

c) Berechnen Sie die notwendige Arbeit, um gegen das Kraftfeld aus (b) vom Punkt $A = (0, 0, 0)$ zum Punkt $B = (1, 2, 3)$ zu gelangen. (3 Punkte)

Aufgabe 2: (15 Punkte)

a.) Gegeben seien ein Potenzialfeld Φ und ein Vektorfeld $\vec{A}$:

$$\Phi(x, y, z) = 3x^2y - 5z + 2xyz; \qquad \vec{A} = (3x - z^2,\ 2xy + y^2z,\ 3x^2z).$$

Berechnen Sie

$$\vec{\nabla}\Phi, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{A}} \qquad \text{(2+2+3 Punkte).}$$

b) Berechnen Sie das Volumenintegral der Funktion $f(x, y, z) = 2xz + x^2 - 3xy$ über einen Zylinder mit Höhe H, Radius R und der z-Achse als Symmetrieachse. Der Zylinderboden befinde sich bei $z = 5H$. (8 Punkte)

Hinweis: Bei der Berechnung des Integrals kann das Additionstheorem $\cos(\varphi + \varphi) = -\sin^2\varphi + \cos^2\varphi$ sehr hilfreich sein.

Aufgabe 3: (16 Punkte)
Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Potenzial:

$$V(x) = \begin{cases} 5V_0 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 2V_0 & \text{für } a < x \leq 2a \\ 5V_0 & \text{für } x > 2a \end{cases}$$

a.) Für welche Energien sind gebundene Zustände möglich? (2 Punkte)

b.) Berechnen Sie die Schwingungsdauer T in Abhängigkeit von m und V_0, wenn sich das Teilchen zur Zeit $t = 0$
(1) am Ort $x_0 = a/2$ mit der Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{V_0/m}$ und
(2) am Ort $x_0 = 3a/2$ mit der Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{V_0/m}$
bewegt. (6+8 Punkte)

Aufgabe 4: (16 Punkte)
a) Finden Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems: (5 Punkte)

$$\begin{aligned} 3x + 5y - z &= 2 \\ x + y &= 4 \\ -2x + 2y + 3z &= 3. \end{aligned}$$

b.) Welches der beiden folgenden Gleichungssysteme besitzt eine nichttriviale Lösung? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

$$(i) \quad \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x - y &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned} \qquad (ii) \quad \begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ 2x - y &= 0 \\ 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

Wie lautet diese Lösung? (6 Punkte)

c) Gegeben sei die Matrix $\hat{A}$:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die zu $\hat{A}$ inverse Matrix $\hat{A}^{-1}$. (5 Punkte)

b.w.

Aufgabe 5: (18 Punkte)

Auf ein Teilchen der Masse m wirken die Kräfte:

a.) $F_1(x) = -m\omega_0^2 x$ und $F_2(t) = \alpha t$. (7 Punkte)

b.) $F_1(x) = -m\gamma\dot{x}$ und $F_2(t) = \alpha\gamma t^2 + 2\alpha t$. (9 Punkte)

Stellen Sie in beiden Fällen die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese unter den Anfangsbedingungen $x(t = 0) = 0$, $\dot{x}(t = 0) = v_0$.