**P21** Da $i^2 = -1 \Rightarrow (-i)^3 = -i^2 i = +i \Rightarrow \boxed{i^3 = i}$

$$i^{15} = \underset{1}{i^{12}} \cdot \underset{-i}{i^3} = -1 \Rightarrow \boxed{i^{15} = -1}$$

$$\sqrt{4(-25)} \underset{\sqrt{-1}=i}{=} i\sqrt{4}\sqrt{25} = 10i \Rightarrow \boxed{\sqrt{4(-25)} = 10i}$$

**P22**

a) $\ln(1+i) = ?$ ~~Setzt x+iy~~. Jede komplexe Zahl läßt sich darstellen als (z

$$\underline{\underline{z = |z| e^{i\varphi}}} \text{ mit } \underline{\underline{|z| = \sqrt{zz^*}}}$$

$$\underline{\underline{\varphi = \arg(z) = \arctan\frac{y}{x}}}$$

$\Rightarrow$ Speziell hier mit $z = 1+i$ und $z^* = 1-i$

$$\underline{\underline{|z|}} = \sqrt{zz^*} = \sqrt{(1+i)(1-i)} = \sqrt{1^2 - i^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

$$\varphi = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\frac{\pi}{4}}$$

(a) Das Produkt zweier komplexen Zahlen erhält man durch formales Ausmultiplizieren unter Beachtung von $i^2=-1$:
Für allgemeine komplexe Zahlen $z_1 = x_1+iy_1$ & $z_2=x_2+iy_2$ ergibt sich:

$$z \equiv z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Speziell hier für $z_1 = 1+i$ und $z_2 = 1-i$

$$z_1 \cdot z_2 = (1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1+1 = 2 \Rightarrow \boxed{z_1 z_2 = 2}$$

(b) Allg. gilt: $z = x+iy \rightarrow \boxed{z^* = x-iy}$

bzw. $z = |z| e^{i\varphi} \rightarrow \boxed{z^* = |z| e^{-i\varphi}}$

Hier speziell:

$$\boxed{z_1^* = 1-i \; ; \; z_2^* = 1+i \; ; \; z_3^* = e^{1/2-\pi i} \; ; \; z_4^* = e^{3+i}}$$

(c) Allg.: $z = x+iy \rightarrow Re(z) = x$ & $Im(z) = y$

$$z = |z| e^{i\varphi} = |z| [\cos\varphi + i \sin\varphi]$$

! Eulersche Formel !

$\rightarrow$

(i) $Re(z_1) = 1$ & $Im(z_1) = 1$
$Re(z_2) = 1$ & $Im(z_2) = -1$

$$z_3 = e^{1/2+\pi i} = e^{1/2} \cdot e^{i\pi} = e^{1/2}\left[\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(z_3) = -e^{1/2} \quad \& \quad \mathrm{Im}(z_3) = 0$$

$$z_4 = e^{3-i} = e^{3} e^{-i} = e^{3}\left[\cos(1) - i\sin(1)\right] =$$

$$= \underbrace{e^{3}\cos(1)}_{\mathrm{Re}(z_4)} + i\underbrace{\left[-e^{3}\cdot\sin(1)\right]}_{\mathrm{Im}(z_4)}$$

**P23** Taylor-Entwicklung um $x = x_0$: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x)\Big|_{x=x_0} \cdot (x-x_0)^n$

(a) Betrachte dazu:

$$\frac{d}{dx}e^x = \frac{d^2}{dx^2}e^x = \dots = \frac{d^n}{dx^n}e^x = e^x \;!!$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \underset{\uparrow\; n=0}{1} + \underbrace{e^{x_0}\Big|_{x_0=0} \cdot x}_{n=1} + \underbrace{\frac{1}{2!}e^{x_0}\Big|_{x_0=0} \cdot x^2}_{n=2} + \dots =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$$

Bem.: Diese Formel sehr gut merken!

**P23-b**

Taylor - Entwicklung der Funktion $f(x)$ um $x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \qquad \text{mit} \qquad f^{(n)}(x_0) \equiv \frac{d^n}{dx^n} f(x) \Big|_{x=x_0}$$

Taylor-Entwicklung von $f(x) = \ln(x+1)$ um $x_0 = 0$ [bis Ordnung 4]

$$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(x)\Big|_{x=0} = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(x)\Big|_{x=0} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(x)\Big|_{x=0} = -1$$

$$f'''(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(x)\Big|_{x=0} = 2$$

$$f''''(x) = -6\frac{1}{(1+x)^4} \Rightarrow f''''(x)\Big|_{x=0} = -6$$

$$\rightarrow \ln(1+x) = 0 + \frac{1}{1}\cdot 1\cdot(x-0) + \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot(x-0)^2 + \frac{1}{6}\cdot 2\cdot(x-0)^3 + \frac{1}{24}\cdot(-6)(x-0)^4 + O(x^5)$$

$$\rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O(x^5)$$

Anmerkung: Die komplette Potenzreihenentwicklung für $\ln(1+x)$ lautet [mit Konvergenzbereich $x \in (-1,1]$ ]

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Taylor - Entwicklung von $f(x) = \tan(x)$ um $x_0 = 0$ [bis 4 Ordnung]

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow f(x)\Big|_{x=0} = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow f'(x)\Big|_{x=0} = 1$$

$$f''(x) = 2\sin x \frac{1}{\cos^3 x} \rightarrow f''(x)\Big|_{x=0} = 0$$

$$f'''(x) = 2\cos x \frac{1}{\cos^3 x} + 6 \sin^2 x \frac{1}{\cos^4 x}$$

$$= 2\frac{1}{\cos^2 x} + 6\sin^2 x \frac{1}{\cos^4 x} \rightarrow f'''(x)\Big|_{x=0} = 2$$

$$f''''(x) = 4\sin x \frac{1}{\cos^3 x} + 12 \sin x \cos x \frac{1}{\cos^4 x} + 24 \sin^3 x \frac{1}{\cos^5 x}$$

$$= 16 \sin x \frac{1}{\cos^3 x} + 24 \sin^3 x \frac{1}{\cos^5 x} \rightarrow f''''(x)\Big|_{x=0} = 0$$

$$\Rightarrow \tan(x) = 0 + \frac{1}{1}\cdot 1\cdot(x-0) + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot(x-0)^2 + \frac{1}{6}\cdot 2\cdot(x-0)^3 + \frac{1}{24}\cdot 0\cdot(x-0)^4 + O(x^5)$$

$$\Rightarrow \tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)$$