P4-1

P4 zu zeigen: $\vec{b}_{\parallel} \cdot \vec{b}_s = 0$. Die Einsteinsche Summenkonvention wird verwendet.

$$\vec{b}_{\parallel} \cdot \vec{b}_s = (b_{\parallel})_i (b_s)_i = \left(\frac{a_i b_j a_j}{a^2}\right)\left(\frac{[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})]_i}{a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^4} (a_j b_j)\, a_i \varepsilon_{ilm} a_l (\vec{b} \times \vec{a})_m =$$

$$= \frac{1}{a^4} a_j b_j a_i a_l \underbrace{\varepsilon_{ilm} \varepsilon_{mkn}}_{\delta_{ik}\delta_{ln} - \delta_{in}\delta_{kl}} b_k a_n \Bigg\} =$$

$$= \frac{1}{a^4} a_j b_j a_i a_l b_k a_n (\delta_{ik}\delta_{ln} - \delta_{in}\delta_{kl}) =$$

$$= \frac{1}{a^4} a_j b_j \left[\underbrace{a_k a_n b_k a_n}_{a_k b_k a_n a_n} - \underbrace{a_n a_k b_k a_n}_{a_k b_k a_n a_n}\right] = 0 \quad \checkmark$$

zu zeigen: $\vec{a} \cdot \vec{b}_{\parallel} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}_{\parallel} = a_i (b_{\parallel})_i = a_i \left[\frac{a_i b_j a_j}{a^2}\right] = \frac{(a_i a_i)(b_j a_j)}{a^2} =$$

$$= \frac{\cancel{a^2} b_j a_j}{\cancel{a^2}} = b_j a_j \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b}_{\parallel} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \checkmark$$

zu zeigen: $\vec{a} \cdot \vec{b}_s = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}_s = a_i \left[\frac{(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a}))_i}{a^2}\right] = \frac{1}{a^2} a_i [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})]_i =$$

$$= \frac{1}{a^2} a_i \varepsilon_{ijm} a_j (\vec{b} \times \vec{a})_m = \frac{1}{a^2} a_i a_j \varepsilon_{ijm} \varepsilon_{mkl} b_k a_l = \quad \checkmark$$

$$= \frac{1}{a^2} a_i a_j b_k a_l (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{kj}) = \frac{1}{a^2}(a_k a_l b_k a_l - a_l a_k b_k a_l) = 0$$

P4-2 zu zeigen: $\vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_S = \vec{b}$

$$(b_{\parallel})_i + (b_S)_i = \frac{1}{a^2} a_i b_j a_j + \frac{1}{a^2}\left[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a})\right]_i =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[a_i a_j b_j + \varepsilon_{ijm} a_j (\vec{b}\times\vec{a})_m\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[a_i a_j b_j + \varepsilon_{ijm} a_j \varepsilon_{mkl} b_k a_l\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[a_i a_j b_j + a_j a_l b_k (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{kj})\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[a_i a_j b_j + a_l a_l b_i - a_k b_k a_i\right]$$

Umbenennen der Indizes in der Summe: $a_k b_k \equiv a_j b_j$ $\Bigg\} =$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\cancel{a_i a_j b_j} + a_l a_l b_i - \cancel{a_i a_j b_j}\right] =$$

$$= \frac{1}{a^2} (\underbrace{a_l a_l}_{= a^2}) b_i = b_i \Rightarrow (b_{\parallel})_i + (b_S)_i = b_i \quad \checkmark$$

P5 - 1

a) $x(t) = \frac{1}{1+e^{-t^2}} = \left(1+e^{-t^2}\right)^{-1}$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -2t \cdot e^{-t^2} \cdot (-1)\left(1+e^{-t^2}\right)^{-2} = \frac{2t \cdot e^{-t^2}}{\left(1+e^{-t^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) = \frac{2e^{-t^2} - 4t^2e^{-t^2}}{\left(1+e^{-t^2}\right)^2} - 2\,\frac{2t \cdot e^{-t^2} \cdot \left(-2te^{-t^2}\right)}{\left(1+e^{-t^2}\right)^3}$$

$$= \frac{e^{-t^2}}{\left(1+e^{-t^2}\right)^3}\left[\left(2-4t^2\right)\left(1+e^{-t^2}\right) + 8t^2e^{-t^2}\right]$$

$$= \frac{2e^{-t^2}}{\left(1+e^{-t^2}\right)^3}\left[1+e^{-t^2} - 2t^2 - 2t^2e^{-t^2} + 4t^2e^{-t^2}\right]$$

$$= \frac{2e^{-t^2}}{\left(1+e^{-t^2}\right)^3}\left[e^{-t^2}\left(1+2t^2\right) + \left(1-2t^2\right)\right]$$

b) $y(t) = \ln(\sin(t))$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = \frac{d}{dt}y(t) = \cos(t) \cdot \frac{1}{\sin(t)} = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \cot(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{y}(t) = \frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{-\sin(t)\cdot\sin(t) - \cos(t)\cdot\cos(t)}{\sin^2(t)} = -\frac{1}{\sin^2(t)}$$

PS-2

c) $z(t) = \arcsin(\sqrt{t})$, $\frac{d}{dt}\arcsin(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = \frac{d}{dt}z(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{t}^2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t-t^2}}$$

$$\Rightarrow \ddot{z}(t) = \frac{d^2}{dt^2}z(t) = \frac{1}{2}\cdot(1-2t)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-t^2}^3} = -\frac{1}{4}\frac{1-2t}{(t-t^2)^{3/2}}$$

somit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+e^{-t^2}} \\ \ln(\sin(t)) \\ \arcsin(\sqrt{t}) \end{pmatrix}$$

→ Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2t\, e^{-t^2}}{(1+e^{-t^2})^2} \\ \cot(t) \\ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t-t^2}} \end{pmatrix}$$

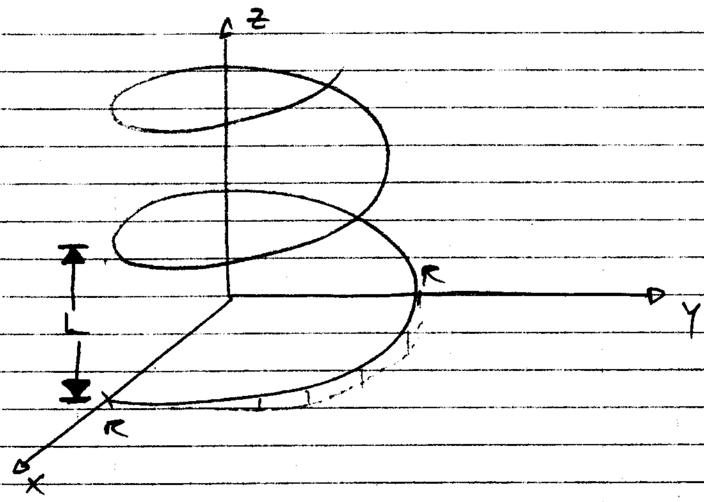
→ Beschleunigung

$$\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2e^{-t^2}}{(1+e^{-t^2})^3}\left[e^{-t^2}(1+2t^2) + (1-2t^2)\right] \\ -\frac{1}{\sin^2(t)} \\ -\frac{1}{4}\frac{1-2t}{(t-t^2)^{3/2}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos\omega t \\ R \cdot \sin\omega t \\ \frac{h}{2\pi}\omega t \end{pmatrix}$$

P6 – 1

(a) Bewegung ist eine Schraubenlinie mit Radius R und Winkelgeschwindigkeit. Pro Umdrehung wird die Höhe h zurückgelegt



(b) Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} -\omega R \sin\omega t \\ \omega R \cos\omega t \\ \frac{h}{2\pi} \cdot \omega \end{pmatrix}$$

→ Betrag der Geschwindigkeit

$$|\vec{v}(t)| = \left[\omega^2 R^2 \sin^2\omega t + \omega^2 R^2 \cos^2\omega t + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \omega^2 \right]^{1/2}$$

$$= \left[\omega^2 R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2 \omega^2 \right]^{1/2}$$

$$= \omega \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}$$ unabhängig von t

Grenzfälle: $R=0 \Rightarrow$ lineare Bewegung in z-Richtung

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{h}{2\pi}\omega \cdot \vec{e}_z$$

$h=0 \Rightarrow$ reine Kreisbewegung

$$\rightarrow \vec{v} = \omega \cdot R \cdot \vec{e}_\varphi$$

(c) Beschleunigung $\vec{b}(t)$

$$\vec{b}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -\omega^2 R\cos\omega t \\ -\omega^2 R \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 R \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 R \cdot \vec{e}_\rho$$

→ keine Beschleunigung in z-Richtung, in dieser Richtung gleichförmige Bewegung.

→ Beschleunigungsvektor immer ins Innere der Schraubenlinie gerichtet $\sim -\vec{e}_\rho$

Betrag der Beschleunigung

$$|\vec{b}(t)| = \left[\omega^4 R^2 \cos^2\omega t + \omega^4 R^2 \sin^2\omega t\right]^{1/2} = \omega^2 R$$

entspricht der „typischen" Kreisbeschleunigung

(PG)-3

(d) Tangentenvektor $\vec{e}_T$

$$\vec{e}_T := \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{|v(t)|}\cdot\vec{v}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_T = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{1}{\omega\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}\begin{pmatrix} -\omega R\sin\omega t \\ \omega R\cos\omega t \\ \frac{h}{2\pi}\omega \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}\begin{pmatrix} -R\sin\omega t \\ R\cos\omega t \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix}}}$$

Grenzfälle: $R=0 \Rightarrow \vec{e}_T = \vec{e}_z$

$h=0 \Rightarrow \vec{e}_T = \vec{e}_\varphi$

Normalenvektor $\vec{e}_N$

$$\vec{e}_N = \frac{\frac{d\vec{e}_T}{dt}}{\left|\frac{d\vec{e}_T}{dt}\right|} = \frac{\frac{d\vec{e}_T}{ds}}{\left|\frac{d\vec{e}_T}{ds}\right|} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_N = 1$$

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{1}{\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}\begin{pmatrix} -\omega R\cos\omega t \\ -\omega R\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-\omega R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{d\vec{e}_T}{dt}\right| = \frac{\omega R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_N = \frac{\frac{d\vec{e}_T}{dt}}{\left|\frac{d\vec{e}_T}{dt}\right|} = \underline{\underline{-\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}}} = -\vec{e}_\rho(t)$$

immer ins Innere der Schraubenlinie gerichtet.

PG-4

(e) Krümmung κ & Krümmungsradius ρ

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = \left|\frac{d\vec{e}_T}{ds}\right| = \left|\frac{dt}{ds}\cdot\frac{d\vec{e}_T}{dt}\right| = \left|\frac{1}{v(t)}\right|\cdot\left|\frac{d\vec{e}_T}{dt}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} = \kappa = \frac{1}{\omega\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}\cdot\frac{\omega R}{\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}} = \underline{\underline{\frac{R}{R^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}}$$

$$\left(\begin{array}{llll} \text{Grenzfälle:} & R = 0 & \Rightarrow & \rho \to \infty,\ \kappa \to 0 \ \checkmark \\ & & & \text{geradlinige Bewegung} \\ & h = 0 & \Rightarrow & R = \rho \ \checkmark \ \text{reine Kreisbewegung} \end{array}\right)$$

(f) Binormalenvektor $\vec{e}_B$

$$\vec{e}_B = \vec{e}_T \times \vec{e}_N = \frac{1}{\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}\begin{pmatrix} -R\sin\omega t \\ R\cos\omega t \\ \frac{h}{2\pi}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos\omega t \\ -\sin\omega t \\ 0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}\begin{pmatrix} 0 + \frac{h}{2\pi}\sin\omega t \\ \frac{h}{2\pi}(-\cos\omega t) - 0 \\ R\sin^2\omega t - (-R\cos^2\omega t)\end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}\begin{pmatrix} \frac{h}{2\pi}\sin\omega t \\ -\frac{h}{2\pi}\cos\omega t \\ R\end{pmatrix}}}$$

$$\left(\begin{array}{llll} \text{Grenzfälle:} & R = 0 & \Rightarrow & \vec{e}_B = \vec{e}_\varphi(t) \\ & h = 0 & \Rightarrow & \vec{e}_B = \vec{e}_z \end{array}\right)$$

$$|\vec{e}_B| = \frac{\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}{\sqrt{R^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}} = 1 ,$$

klar, da $|\vec{e}_T \times \vec{e}_N| = |\vec{e}_T|\cdot|\vec{e}_N|$ für $\vec{e}_T \perp \vec{e}_N$

$= 1$

(g) zu zeigen, daß sich die Beschleunigung darstellen läßt als:

$$\vec{b} = \underbrace{\dot{v}\,\vec{e}_T}_{\vec{b}_T} + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}\,\vec{e}_N}_{\vec{b}_N} = \vec{b}_T + \vec{b}_N$$

$$\vec{e}_T = \begin{pmatrix} -R\sin\omega t \\ R\cos\omega t \\ L/2\pi \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_N = -\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(t) = \omega\sqrt{R^2 + \left(\tfrac{L}{2\pi}\right)^2} \longrightarrow \dot{v}(t) = 0$$

⇝ keine Beschleunigung in tangentialer Richtung

$$\rho = \frac{R^2 + (L/2\pi)^2}{R}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\dot{v}}_{=0}\,\vec{e}_T + \frac{v^2}{R}\,\vec{e}_N = \frac{\omega^2\left(\cancel{R^2 + (L/2\pi)^2}\right)}{\cancel{R^2 + (L/2\pi)^2}} \cdot R \begin{pmatrix} -\cos\omega t \\ -\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\omega^2 R \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 R\,\vec{e}_\rho = \vec{b}\ ✓$$