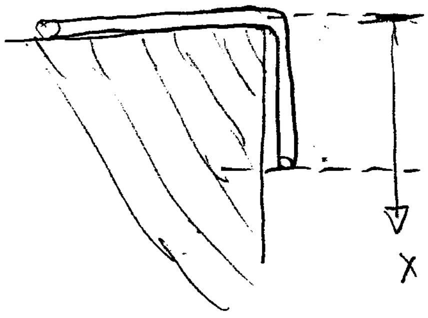
P17

(a) Die Kraft, die das Seil der Masse m und der Länge l nach unten Beschleunigt, ist durch die Gewichtskraft gegeben, die auf den Teil des Seils der Länge x wirkt, der zu einem gegebenen Zeitpunkt bereits über die Tischkante herabhängt,



also $\vec{F} = g m \frac{x}{l} \vec{e}_x$ (wenn wir das Koordinatensystem so wie in der Skizze festlegen). Mit $\vec{F} = F\vec{e}_x$; $F \equiv g m \frac{x}{l}$, haben wir also folgende Bewegungsgleichung:

$$\boxed{m\ddot{x} = g m x / l} \quad (1)$$

Zur Notation: $\dot{x}(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt}$; $\ddot{x}(t) \equiv \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ usw

(b) Die Energie setzt sich aus kinetischer Energie und potentiellen Energie zusammen.

$E_{kin} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \rightarrow$ kinetische Energie

$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \rightarrow V = -\int_0^x F(x) = -\int_0^x g m \frac{x}{l} dx = -\frac{1}{2} \frac{gm}{l} x^2$

(! Kraft ist konservativ !)

Nullpunkt der pot. Energie legen wir o.B.d.A. auf Tischhöhe, also bei $x=0$.

$\Rightarrow$ Gesamtenergie: $\boxed{E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2}\frac{gm}{l} x^2} \quad (2)$

Energieerhaltung bedeutet:

$$\frac{d}{dt}E = 0 \rightarrow E = \text{const.}$$

Also: Mit (2) ist

$$\dot{E} = \frac{1}{2} m 2\dot{x}\cdot\ddot{x} - \frac{1}{2}\frac{m}{l}g 2x\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\dot{x}^2(t) = 2\dot{x}(t)\cdot\frac{d}{dt}\dot{x}(t) \qquad \frac{d}{dt}x^2(t) = 2x\frac{d}{dt}x(t) = 2x\dot{x}$$

Produktregel

$$\Rightarrow \dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} - \frac{m}{l}gx\dot{x} = \dot{x}\cdot g\frac{m}{l}x - \frac{m}{l}gx\dot{x} = 0 \checkmark$$

mit (1)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\dot{E} = 0 \rightarrow \underline{\underline{E = \text{const.}}}$$

(c) Auflösen der Energie (Glg. (2)) nach $\dot{x}(t)$ $\rightarrow$

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E + \frac{1}{2}\frac{m}{l}g\,x^2(t)\right]} \qquad (3)$$

E ist zeitlich konst. $\rightarrow E(t) \stackrel{!}{=} E(t=0) = -\frac{1}{2}\frac{m}{l}x_0^2$

Anfangs-
bedingung

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{x^2(t)-x_0^2}} = 1 \qquad (4)$$

Aus (4): Integration durch Variablentrennung:

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{x'^2 - x_0^2}}}_{=\operatorname{arcosh}\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) \text{ (siehe Bronstein)}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \int_0^t dt = \sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right)}$$

Bemerkung: Die Differentialgleichung, Gleichung (1), kann auch direkt gelöst werden; siehe W. Nolting, Band 1, Lösung der Aufgabe 2.3.4.

Lösung der Präsenzaufgabe P18 (Raketenantrieb-I)

P18(a)
Die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x} = -g - u\frac{\dot{m}}{m}, \quad m = m(t) \tag{1}$$

oder mit $v = \dot{x}$:

$$\dot{v} = -g - u\frac{\dot{m}}{m}, \quad m = m(t) \quad . \tag{2}$$

Integration liefert

$$v(t) - v(t_0) = -g(t - t_0) - u\int_{t_0}^{t} \frac{\dot{m}(t')}{m(t')}dt' \quad . \tag{3}$$

Unter Ausnutzung der Anfangsbedingung $v_0(t_0 = 0) = 0$ vereinfacht sich (3) zu:

$$\boxed{v(t) = -gt - u\int_0^t \frac{\dot{m}(t')}{m(t')}\,dt'} \quad . \tag{4}$$

Gleichung (4) ist nun der allgemeiner Ausdruck zur Bestimmung der Geschwindigkeit der Rakete als Funktion der Zeit.
Hier betrachten wir den Fall einer nichtlinearen Massenabnahme gemäß

$$m(t) = m_0 + \frac{m_T}{1 + \frac{t}{\tau_0}} \quad , \tag{5}$$

woraus sich für $\dot{m}$ ergibt:

$$\dot{m}(t) = -\frac{m_T}{\tau_0}\frac{1}{\left(1 + \frac{t}{\tau_0}\right)^2} \quad . \tag{6}$$

Einsetzen von (6) und (5) liefert:

$$v(t) = -gt + u\frac{m_T}{\tau_0}\int_0^t \frac{dt'}{\left(1 + \frac{t'}{\tau_0}\right)^2\left(m_0 + \frac{m_T}{1+\frac{t'}{\tau_0}}\right)} \quad . \tag{7}$$

Die Berechnung des Integrals (7) geschieht nun durch die Substitution:

$$y = 1 + \frac{t'}{\tau_0}, \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{dt'}{\tau_0} \quad . \tag{8}$$

Einsetzen der Substitution (8) in (7) ergibt:

$$v(t) = -gt + um_T\int_1^{1+t/\tau_0} \frac{dy}{y^2\left(m_0 + \frac{m_T}{y}\right)} = -gt + um_T\int_1^{1+t/\tau_0} \frac{dy}{y\left(m_0 y + m_T\right)} \quad . \tag{9}$$

Jetzt benutzen wir Bronstein (siehe Hinweis), und erhalten:

$$\begin{aligned} v(t) &= -gt + um_T \left[-\frac{1}{m_T} \ln \left(\frac{m_0 y + m_T}{y} \right) \right] \Bigg|_1^{1+\frac{t}{\tau_0}} \\ &= -gt + u \left[\ln \left(\frac{m_0 + m_T}{1} \right) - \ln \left(\frac{m_0 + \frac{m_0 t}{\tau_0} + m_T}{1 + \frac{t}{\tau_0}} \right) \right] \\ &= -gt + u \left[\ln (m_0 + m_T) + \ln \left(1 + \frac{t}{\tau_0} \right) - \ln \left(m_0 + \frac{m_0 t}{\tau_0} + m_T \right) \right] \\ &= -gt + u \left[\ln \left(1 + \frac{t}{\tau_0} \right) - \ln \left(\frac{1 + \frac{m_T}{m_0} + \frac{t}{\tau_0}}{1 + \frac{m_T}{m_0}} \right) \right] \end{aligned} \tag{10}$$

und schließlich:

$$\boxed{v(t) = -gt + u \ln \left[\frac{\left(1 + \frac{t}{\tau_0}\right) \left(1 + \frac{m_T}{m_0}\right)}{1 + \frac{m_T}{m_0} + \frac{t}{\tau_0}} \right]} \quad . \tag{11}$$

Der Grund obiger Umformungen bis auf das Endergebnis (11) war der in Teil (b) noch zu untersuchende Fall.

P18(b)

Der gesamte Treibstoff wird erst bei $t \longrightarrow \infty$ aufgebraucht, denn es ist in diesem Falle:

$$m(t) = m_0 + \frac{m_T}{1 + \frac{t}{\tau_0}} \xrightarrow[t \to \infty]{} m_0 \quad . \tag{12}$$

Zur Berechnung der Endgeschwindigkeit v_E im kräftefreien Fall ($g = 0$) gehen wir von Glg. (11) mit $g = 0$ und $t \to \infty$ aus:

$$v(t) = +u \ln \left[\frac{\left(1 + \frac{t}{\tau_0}\right) \left(1 + \frac{m_T}{m_0}\right)}{1 + \frac{m_T}{m_0} + \frac{t}{\tau_0}} \right] \xrightarrow[t \to \infty]{} u \ln \left[\frac{\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \left(1 + \frac{m_T}{m_0}\right)}{\frac{t}{\tau_0}} \right] \quad . \tag{13}$$

Wir erhalten also als Endergebnis für v_E

$$\boxed{v_E = v(t \to \infty) = u \ln \left(1 + \frac{m_T}{m_0} \right)} \quad . \tag{14}$$

P18(c)

Aus Glg. (14) erhält man dann für das Verhältnis $\frac{m_T}{m_0}$:

$$\boxed{\frac{m_T}{m_0} = e^{v_E/u} - 1} \quad . \tag{15}$$