P33-1

P33 (a) Der Meteorit ruht bei $t=0$. Damit ist auch $L=0$; er führt dann eine geradlinige, auf den Erdmittelpunkt gerichtete Bewegung aus!

Der Energiesatz liefert:

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 - \gamma\frac{mM_E}{r} = E \overset{!!}{=} \underbrace{-\gamma\frac{mM_E}{R}}_{\text{Energie zur Zeit } t=0 \text{ bei } r=R, \text{ da kinetische Energie Null ist.}} \qquad (1)$$

M_E kann aus (1) weiter eliminiert werden:

$$(F=)\, mg = \gamma\frac{mM_E}{r_E^2} \qquad (2)$$

(1) und (2) liefern:

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 = -mgr_E^2\underbrace{\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)}_{(<0!!)}$$

Somit ergibt sich für die Geschwindigkeit $v=\dot{r}(r_E)$ beim Erreichen der Erdoberfläche:

$$\boxed{v=\sqrt{2gr_E\left(1-\frac{r_E}{R}\right)}}$$

Musterlösung der Präsenzaufgabe P33(b)

Zur Errinerung: Taylor-Entwicklung von $\sqrt{1 \pm x}$:

$$\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2} + \cdots, \quad \text{für } |x| << 1 \quad .$$

(i) Für $R >> r_E$ bzw. $\frac{r_E}{R} << 1$ ergibt sich

$$v \approx \sqrt{2gr_E}\left(1 - \frac{r_E}{2R} + \cdots\right) \quad .$$

(ii) Für $R = r_E + h$ mit $h << r_E$:

$$\frac{1}{r_E} - \frac{1}{R} = \frac{R - r_E}{r_E R} = \frac{h}{r_E^2 + r_E h} \approx \frac{h}{r_E^2}$$

und somit ergibt sich für v:

$$v \approx \sqrt{2gr_E \frac{h}{r_E^2}} = \sqrt{2gh} \quad .$$

Letztes Resultat kann man auch über Taylor-Entwicklung näherungsweise erhalten:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2gr_E\left(1 - \frac{r_E}{R}\right)} = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{r_E}{r_E + h}} \\ &= \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{\frac{r_E}{h}}{\frac{r_E}{h} + 1}} = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{h}{r_E}}} \\ &\approx \sqrt{2gh}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h}{r_E}\right) \quad . \end{aligned}$$

P34

Kapitel 2.5

Lösung zu Aufgabe 2.5.1

Nach (2.40) gilt für die Vierer-Geschwindigkeit:

$$u^\mu = \gamma(v)(c, \mathbf{v}).$$

Die Eigenzeit τ ist lorentz-invariant. Damit ist

$$b^\mu = \frac{d}{d\tau} u^\mu$$

ein kontravarianter Vierer-Vektor.

a)

$$u_\mu u^\mu = \gamma^2 (c^2 - \mathbf{v}^2) = c^2.$$

Daraus folgt:

$$\frac{d}{d\tau} u_\mu u^\mu = 0 = \mu_{\mu\nu} \frac{d}{d\tau} (u^\nu u^\mu).$$

$\mu_{\mu\nu}$ ist der metrische Tensor. Man beachte die Summenkonvention. Es gilt somit:

$$0 = 2\,\mu_{\mu\nu}\, u^\nu \frac{d}{d\tau} u^\mu = 2\, u_\mu \frac{d}{d\tau} u^\mu = 2\, u_\mu b^\mu.$$

Dies ist die Behauptung:

$$(u, b) = u_\mu b^\mu = 0.$$

b)

$$b^\mu = \frac{d}{d\tau} u^\mu = \frac{du^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau}.$$

Es gilt nach (2.38):

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\, d\tau,$$

und damit

$$b^\mu = \gamma \frac{du^\mu}{dt}.$$

Wir benutzen

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{d}{dt} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \\ &= \frac{1}{v} \left(v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y + v_z \dot{v}_z \right) = \frac{\mathbf{v}}{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \end{aligned}$$

zur Berechnung von

$$\frac{d}{dt} \gamma(v) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{v}{c^2} \frac{dv}{dt} = (\gamma(v))^3 \frac{1}{c^2} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right).$$