1. Klausur zur Mechanik I **WS 97/98**
Prof. U. Mosel **20.12.97**

Zeit: 3h

Bitte bearbeiten Sie die verschiedenen Aufgaben auf getrennten Blättern!

Bitte Namen auf jedes abzugebene Blatt schreiben!

Bitte Namen des Übungsgruppenleiters auf jedem Blatt angeben!

K1) (6 Punkte) Wie groß ist im Punkte $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ die Projektion von $\vec{A}(\vec{r}) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2, z^2)$ auf die Richtung von $\vec{B} = (1, 2, 3)$? Welchen Wert besitzt der eingeschlossene Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ an diesem Punkt?

K2) Ein Teilchen bewege sich auf der Raumkurve $\vec{r}(t) = (t, \frac{t^2}{2}, t)$. t gibt hierbei die Zeit an. Finden Sie

(a) (2 Punkte) die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und deren Betrag $|\vec{v}(t)|$;

(b) (2 Punkte) die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ und deren Betrag $|\vec{a}(t)|$;

(c) (3 Punkte) den Einheitstangentenvektor $\vec{T}$ und den Einheitsnormalenvektor $\vec{N}$ zur Zeit t;

(d) (2 Punkte) die tangentiale Beschleunigung a_t und die normale Beschleunigung a_n.

K3) Sei $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (2, 4, 0)$ und $\vec{c} = (-1, 0, 1)$.

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Ausdrücke $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$;

(b) (4 Punkte) und $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

K4) Gegeben sei das skalare Feld $\Phi(\vec{r}) = x^2yz^3$ und das Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r}) = (xz, -y^2, 2x^2y)$. Berechnen Sie

(a) (2 Punkte) $\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$,

(b) (2 Punkte) $\vec{\nabla} \cdot (\Phi\vec{A})$,

(c) (4 Punkte) $\vec{\nabla} \times (\Phi\vec{A})$.

K5) (7 Punkte) Zeigen Sie, daß für das Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = (2xyz, x^2z, x^2y)$$

das Linienintegral $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$ zwischen zwei Punkten wegunabhängig ist. Berechnen Sie den Wert, wenn der Weg C vom Anfangspunkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ zum Endpunkt $P = (x, y, z)$ verläuft.

K6) (6 Punkte) Zeigen Sie, daß das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = -m\omega^2\vec{r}$$

konservativ ist.

K7) Ein Fluß besitzt eine konstante Strömungsgeschwindigkeit von $v_F = 1$ m/s relativ zum Ufer. Ein Schwimmer erreicht eine konstante Geschwindigkeit von $v_S = 1.5$ m/s in ruhigem Gewässer. Der Fluß ist 50 m breit.

(a) (3 Punkte) Wie lang braucht der Schwimmer, um an die genau gegenüberliegende Uferseite zu kommen.

(b) (2 Punkte) Welcher ist der schnellste Weg, um an die andere Uferseite zu kommen? Wie lange dauert es jetzt? Wie groß ist die hierbei erfahrene Abdrift?

(c) (2 Punkte) Der Fluß habe nun eine Strömungsgeschwindigkeit von $v_F = 2$ m/s. Welches ist nun der schnellste Weg, zur anderen Uferseite und wieder zurück zum *Ausgangspunkt* zu schwimmen?