Grundlagen der Mechanik und Elektrodynamik (SS 2007)
Lösungsvorschläge zur Klausur

Aufgabe 1: Energiebilanz mit Reibung

(a) Es gilt:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

(b) Für die Kräftebilanz gilt:

$$\begin{aligned} & m\dot{\vec{v}} = -\frac{m}{\tau}\vec{v} - \vec{\nabla}V \\ \Rightarrow \quad & m\dot{\vec{v}} + \vec{\nabla}V = -\frac{m}{\tau}\vec{v} \\ \Rightarrow \quad & m\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}V = -\frac{m}{\tau}\vec{v}\cdot\vec{v} \end{aligned}$$

Mit $\frac{d}{dt}\vec{v}^2 = 2\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}$ und $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \vec{v}\cdot\vec{\nabla}V$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\frac{m}{2}v^2 + \frac{dV}{dt} = -\frac{m}{\tau}v^2 \\ \Rightarrow \quad & \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + V\right) = -\frac{m}{\tau}v^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Perle auf einem rotierenden Draht

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} & L = T - V \\ & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{(q)}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \end{aligned}$$

(b) Geeignete generalisierte Koordinaten sind Polarkoordinaten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Die Zwangsbedingung ist $\dot{\phi} = \omega = const \Rightarrow \phi = \omega t$. Damit folgt:

$$\vec{r}(r,t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

(c) Für die kinetische Energie T gilt:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos(\omega t) - r\omega\sin(\omega t) \\ \dot{r}\sin(\omega t) + r\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad T &= \frac{m}{2}\left[(\dot{r}\cos(\omega t) - r\omega\sin(\omega t))^2 + (\dot{r}\sin(\omega t) + r\omega\cos(\omega t))^2\right] \\
&= \frac{m}{2}\big[\dot{r}^2\cos^2(\omega t) - 2r\dot{r}\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) + r^2\omega^2\sin^2(\omega t) + \dot{r}^2\sin^2(\omega t) \\
&\quad +2r\dot{r}\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) + r^2\omega^2\cos^2(\omega t)\big] \\
&= \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2\underbrace{(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))}_{=1} + r^2\omega^2\underbrace{(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))}_{=1}\right] \\
&= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2)
\end{aligned}$$

Für die potentielle Energie V gilt:

$$V = 0$$

Damit folgt für die Lagrangefunktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$$

(d) Es gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} \\
&= \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m\omega^2 r \\
&= m\ddot{r} - m\omega^2 r
\end{aligned}$$

Für die Bewegungsgleichung folgt also:

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$

(e) Um zu zeigen, dass der Ansatz die Bewegungsgleichung löst, wird dieser in die Bewegungsgleichung eingesetzt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& r = A\exp(\omega t) + B\exp(-\omega t) \\
\Rightarrow \quad & \dot{r} = \omega A\exp(\omega t) - \omega B\exp(-\omega t) \\
\Rightarrow \quad & \ddot{r} = \omega^2 A\exp(\omega t) + \omega^2 B\exp(-\omega t) = \omega^2 r
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\ddot{r} - \omega^2 r = \omega^2 r - \omega^2 r = 0$$

Der Ansatz löst also die Bewegungsgleichung.
Mit den Anfangsbedingungen folgt:

$$\begin{aligned}
r(t=0) &= A + B = r_0 \\
\dot{r}(t=0) &= \omega A - \omega B = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B \\
\Rightarrow \quad 2A = r_0 \quad &\Rightarrow \quad A = B = \frac{r_0}{2}
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
r(t) &= \frac{r_0}{2}\left(\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)\right) \\
&= r_0 \cosh(\omega t)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Der Trägheitstensor eines Würfels

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
I_{ij}^{(S)} &= \int dV\ \rho[\vec{r}^2\delta_{ij} - r_i r_j] \\
I_{ij} &= I_{ij}^{(S)} + m[\vec{a}^2\delta_{ij} - a_i a_j]
\end{aligned}$$

(b) Das Volumenelement lautet $dV = dxdydz$ und für das Volumen gilt $V = b^3$. Damit folgt für die Dichte:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{b^3}$$

Aufgrund der Symmetrie müssen die Diagonalelemente des Trägheitstensors gleich sein. Es gilt:

$$\begin{aligned}
I_{11}^{(S)} = I_{22}^{(S)} = I_{33}^{(S)} = \int dV\ \rho(y^2+z^2) &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz\ \frac{m}{b^3}(y^2+z^2) \\
&= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy\ \frac{m}{b^3}\left(y^2 z + \frac{1}{3}z^3\right)\Bigg|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \\
&= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy\ \frac{m}{b^3}\left(y^2 b + \frac{1}{3}\frac{b^3}{4}\right) \\
&= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx\ \frac{m}{b^3}\left(\frac{1}{3}y^3 b + \frac{1}{12}b^3 y\right)\Bigg|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}
\end{aligned}$$

$$I_{11}^{(S)} = I_{22}^{(S)} = I_{33}^{(S)} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \, \frac{m}{b^3} \left(\frac{1}{12} b^3 b + \frac{1}{12} b^3 b \right)$$
$$= \frac{m}{b^3} b \left(\frac{1}{6} b^4 \right)$$
$$= \frac{1}{6} m b^2$$

Die übrigen Elemente des Tensors sind Null. Dies soll an Hand des Elements $I_{13}^{(S)}$ gezeigt werden:

$$I_{13}^{(S)} = \int dV \, \rho(-xz) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \, \frac{m}{b^3}(-xz)$$
$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \, \frac{m}{b^3} \left(-x \frac{1}{2} z^2 \right) \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \, 0 = 0$$

Damit lautet der Trägheitstensor:

$$\underline{\underline{I}}^{(S)} = \frac{1}{6} m b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Mit dem Steinerschen Satz und dem Verschiebungsvektor $\vec{a} = \frac{b}{2}\vec{e}_x - \frac{b}{2}\vec{e}_y$ folgt:

$$\underline{\underline{I}} = \frac{1}{6} m b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} \frac{b^2}{4} & \frac{b^2}{4} & 0 \\ \frac{b^2}{4} & \frac{b^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{4} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{6} m b^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} m b^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{12} m b^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{12} m b^2 \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{12} m b^2 \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Der Kugelkondensator

(a) Es gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

(b) Aufgrund der Kugelsymmetrie gilt für das elektrische Feld:

$$E(\vec{r}) = E(r)\vec{e}_r$$

Es gilt der Gaußsche Satz:

$$\frac{Q_{ges}}{\varepsilon_0} = \underbrace{\int_V d^3r\, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \oint_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{E}}_{\text{Gaußscher Satz}}$$

Das Flächenelement in Kugelkoordinaten lautet:

$$d\vec{a} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi\, \vec{e}_r$$

Für das elektrische Feld für $r < R_i$ folgt mit $Q_{ges} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 = \oint_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, r^2 \sin(\theta) E(r) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, r^2 \sin(\theta) E(r) \\ &= 4\pi r^2 E(r) \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\Rightarrow \quad E(r) = 0 \qquad ; \quad r < R_i$$

Für das elektrische Feld für $R_i < r < R_a$ folgt mit $Q_{ges} = Q_i$:

$$\frac{Q_i}{\varepsilon_0} = 4\pi r^2 E(r)$$

Damit folgt:

$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r^2} \qquad ; \quad R_i < r < R_a$$

Für das elektrische Feld für $r > R_a$ folgt mit $Q_{ges} = Q_i + Q_a$:

$$\frac{Q_i + Q_a}{\varepsilon_0} = 4\pi r^2 E(r)$$

Damit folgt:

$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i + Q_a}{r^2} \qquad ; \quad r > R_a$$

Zusammengefasst ergibt sich also für das elektrische Feld:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r < R_i \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r^2}\vec{e}_r & R_i < r < R_a \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i+Q_a}{r^2}\vec{e}_r & r > R_a \end{cases}$$

(c) Für die Potentialdifferenz zwischen den Kugelschalen ergibt sich aus dem Wegintegral:

$$\begin{aligned} U = -\int d\vec{r}\cdot\vec{E} = -\int_{R_a}^{R_i} dr\; E(r) &= -\int_{R_a}^{R_i} dr\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r^2} \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q_i\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_a}^{R_i} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q_i\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right) \end{aligned}$$

Damit folgt für die Kapazität:

$$C = \frac{Q_i}{U} = \frac{Q_i}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q_i\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}} = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_i R_a}{R_a - R_i}$$

Aufgabe 5: Das Magnetfeld einer kreisförmigen Leiterschleife

(a) Es gilt:

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}I\oint\frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

(b) Da entlang des Rings integriert werden muss und das magnetische Feld entlang der z-Achse bestimmt werden soll, muss gelten:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \\ \vec{r}' &= \begin{pmatrix} R\cos(\phi) \\ R\sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \\ d\vec{r}' &= \begin{pmatrix} -R\sin(\phi) \\ R\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} d\phi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}-\vec{r}' = \begin{pmatrix} -R\cos(\phi) \\ -R\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{R^2\cos^2(\phi)+R^2\sin^2(\phi)+z^2} = \sqrt{R^2+z^2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad (\vec{r}-\vec{r}')\times d\vec{r}' &= \begin{pmatrix} -R\cos(\phi) \\ -R\sin(\phi) \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\sin(\phi) \\ R\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} d\phi \\
&= \begin{pmatrix} -zR\cos(\phi) \\ -zR\sin(\phi) \\ -R^2\cos^2(\phi)-R^2\sin^2(\phi) \end{pmatrix} d\phi \\
&= -\begin{pmatrix} zR\cos(\phi) \\ zR\sin(\phi) \\ R^2 \end{pmatrix} d\phi
\end{aligned}$$

Damit folgt für das magnetische Feld $\vec{B}(z)$:

$$\begin{aligned}
\vec{B}(z) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\,(-1)\begin{pmatrix} zR\cos(\phi) \\ zR\sin(\phi) \\ R^2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\left[\begin{pmatrix} zR\sin(\phi) \\ -zR\cos(\phi) \\ R^2\phi \end{pmatrix}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi R^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{\sqrt{R^2+z^2}}\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Aufgabe 6: Die inhomogenen Wellengleichungen

(a) Es gilt:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \tag{2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}+\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E} \tag{4}$$

(b) (i) Anwendung der Rotation auf Gleichung (2) liefert:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{=\frac{\rho}{\varepsilon_0}} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}\rho - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\partial_t \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{B})}_{=\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E}}$$
$$= -\mu_0 \partial_t \vec{j} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{E}$$

Damit folgt:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{E} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{E} = -\mu_0 \partial_t \vec{j} - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}\rho$$
$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{E} = \mu_0 \partial_t \vec{j} + \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\nabla}\rho$$

(ii) Anwendung der Rotation auf Gleichung (4) liefert:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}\underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_{=0} - \vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0(\vec{\nabla} \times \vec{j}) + \frac{1}{c^2}\partial_t \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{=-\partial_t \vec{B}}$$
$$= \mu_0(\vec{\nabla} \times \vec{j}) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{B}$$

Damit folgt:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{B} + \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{B} = \mu_0(\vec{\nabla} \times \vec{j})$$
$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{B} = -\mu_0(\vec{\nabla} \times \vec{j})$$