2. Klausur zur Mechanik

WS 01/02

Bitte jede Aufgabe auf ein neues Blatt mit Name und Übungsgruppe.

1: a) Berechnen Sie die Produkte AB und BA von 6

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie $e^{i\alpha A}$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist α eine beliebige reelle Zahl.

2: Ein Teilchen der Masse m befindet sich unter dem Einfluss der Zentralkraft $\vec{F} = -2c\vec{r}/r^4$. Dabei ist c eine positive Konstante. Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass sich die ganze Bewegung in der x-y-Ebene abspielt. Warum ist das möglich? Bestimmen Sie das zugehörige Potential. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Teilchen bei $r = r_0$ und $\varphi = 0$ und besitzt die Geschwindigkeit $\vec{v} = v_0\vec{e}_\varphi$. Dabei sind r, φ die Polarkoordinaten in der x-y-Ebene. Bestimmen Sie Energie und Drehimpuls des Teilchens. Geben Sie dr/dt als Funktion von r an. Bestimmen Sie r als Funktion von t. 12

3: Besitzt das Kraftfeld $\vec{F} = -c\vec{r}/r^{3+\epsilon}$, $0 < \epsilon \ll 1$, ein Potential? Dabei ist c eine positive Konstante. Welche Arten von Bahnen gibt es, gebundene und/oder ungebundene? Begründen Sie Ihre Antworten! Berechnen Sie ein r_0, für das es eine Bahn mit konstantem Radius $r = r_0$ gibt. Handelt es sich hierbei um eine gebundene oder ungebundene Bahn? 10

4: Ein Teilchen der Masse m befindet sich unter dem Einfluss des Potentials $V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$. Zeigen Sie, dass $k_1 = m\dot{z}$, $k_2 = x\dot{y} - y\dot{x}$ und $k_3 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+V$ Erhaltungsgrößen sind. Berechnen Sie den zugehörigen Drehimpulsvektor. Zu welchen physikalischen Größen gehören die Erhaltungsgrößen k_1, k_2 und k_3? 6

5: Gegeben sei ein nach unten geöffnetes Paraboloid, parametrisiert durch die Gleichung $z = -a(x^2+y^2)$. Ein Teilchen der Masse m bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft auf der Außenseite des Paraboloids. Berechnen Sie die Zwangskraft, die auf das Teilchen wirkt als Funktion von Ort und Geschwindigkeit des Teilchens. Stellen Sie dazu die Bewegungsgleichungen auf. Wann löst sich das Teilchen von dem Paraboloid? 10
Hinweis: Überlegen Sie, welche Zwangskraft das Paraboloid auf das Teilchen ausüben kann: Eine, die vom Paraboloid wegzeigt, oder eine, die zu ihm hinzeigt, oder gar beides?

6: Ein System S' bewegt sich mit relativistischer Geschwindigkeit v gegen ein System S entlang der z-Achse. Die z'-Achse liege entlang der z-Achse und bei $z = 0$, $t = 0$ sei auch $z' = 0$, $t' = 0$. Wie sehen die Größen $z^2 - c^2t^2$, $z - ct$ und $\frac{z^4}{c^2} - 2z^2t^2 + c^2t^4$ im System S' aus? Welche Größen sind Skalare? (Anmerkung: x- und y-Komponenten sollen bei dieser Betrachtung unberücksichtigt bleiben.) 6

Viel Erfolg!