Prof. Mosel — Wintersemester 2007/2008
Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

Präsenzaufgaben für den 14.01.2008

P27. Vektoren in Zylinderkoordinaten
Ein neben dem kartesischen Koordinatensystem (x, y, z) oft verwendetes Koordinatensystem sind die *Zylinderkoordinaten* (ρ, ϕ, z). Der Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und Zylinderkoordinaten lautet gemäß der Vorlesung:

$$x = \rho\cos(\phi),\ \ y = \rho\sin(\phi),\ \ z = z \quad .$$

(a) Drücken Sie den Vektor $\vec{a} = z\vec{e}_x + 2x\vec{e}_y + y\vec{e}_z$ in Zylinderkoordinaten aus.

(b) Bestimmen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_z$ für die Koordinaten ρ, ϕ, z.

(c) Zeigen Sie, daß $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_z$ in jedem Raumpunkt ein Rechtssystem bilden.

P28. Differentialoperatoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten
Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}$ lautet gemäß der Vorlesung in krummlinigen Koordinaten:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}(F_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial\xi_2}(F_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}(F_3h_1h_2)\right]$$

mit $h_i \equiv h(\xi_i) = |\partial\vec{r}/\partial\xi_i|$ (siehe Vorlesung).

(a) Leiten Sie die Darstellung des *Laplace-Operators* $\triangle$ in krummlinigen Koordinaten aus der Beziehung $\triangle f = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}f)$ ab.

(b) Berechnen Sie den Laplace-Operator in Zylinder- und Kugelkoordinaten.

P29. Grundzüge der Relativitätstheorie
Ein Raumschiff (Inertialsystem S') fliegt an der Erde (Inertialsystem S) mit einer Geschwindigkeit von 0.6 c (c ist die Lichtgeschwindigkeit) vorbei. Die beiden Inertialsysteme synchronisieren ihre Uhren auf $t = t' = 0$ bei $x = x' = 0$, wenn das Raumschiff die Erde gerade passiert (Ereignis 1). 10 Minuten später, von der Erde aus gemessen, wird ein Lichtsignal zum Raumschiff ausgesandt (Ereignis 2). Das Lichtsignal wird später vom Raumschiff detektiert (Ereignis 3).

(a) Ist das Zeitintervall zwischen den Ereignissen 1 und 2 ein *Eigenzeit-Intervall* im Bezugssystem des Raumschiffes S'? Ist das Zeitintervall zwischen den Ereignissen 1 und 2 ein *Eigenzeit-Intervall* im Bezugssystem des Erde S?

(b) Ist das Zeitintervall zwischen den Ereignissen 2 und 3 ein *Eigenzeit-Intervall* im Bezugssystem des Raumschiffes S'? Ist das Zeitintervall zwischen den Ereignissen 2 und 3 ein *Eigenzeit-Intervall* im Bezugssystem des Erde S?

(c) Ist das Zeitintervall zwischen den Ereignissen 1 und 3 ein *Eigenzeit-Intervall* im Bezugssystem des Raumschiffes S'? Ist das Zeitintervall zwischen den Ereignissen 1 und 3 ein *Eigenzeit-Intervall* im Bezugssystem des Erde S?

(d) Berechnen Sie den Zeitpunkt des Ereignisses 2 für einen Beobachter auf dem Raumschiff.

Bitte Wenden!

Hausaufgaben für den 21.01.2008

H21. (4 Punkte)
Ein neben dem kartesischen Koordinatensystem (x, y, z) oft verwendetes Koordinatensystem sind die *Kugelkoordinaten* (r, θ, ϕ). Der Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten lautet gemäß der Vorlesung:

$$x = r\sin(\theta)\cos(\phi), \;\; y = r\sin(\theta)\sin(\phi), \;\; z = r\cos(\theta) \quad .$$

(a) Geben Sie den Vektor $\vec{a} = e_x - 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$ in Kugelkoordinaten aus.

(b) Bestimmen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ für die Koordinaten r, θ, ϕ.

(c) Zeigen Sie, daß $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\phi$ in jedem Raumpunkt ein Rechtssystem bilden.

H22. (4 Punkte)
Gegeben seien die Vektorfelder $\vec{g}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$ und $\vec{h}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_\phi$. Berechnen Sie unter Verwendung der Kugelkoordinatendarstellung die folgenden Beziehungen:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{g}), \quad \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{h}), \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{g}), \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{h}) \quad .$$

H23. (4 Punkte)
Wir fahren mit der Präsenzaufgabe P29 fort.

(e) Wie weit ist die Erde entfernt (vom Standpunkt des Raumschiffes aus), wenn das Lichtsignal von der Erde aus emittiert wird?

(f) Geben Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus P29(d) und H23(e) die Zeit auf dem Raumschiff an, wenn das Lichtsignal es erreicht.

(g) Berechnen Sie den Zeitpunkt vom Ereignis 3, von der Erde aus betrachtet.

(h) Untersuchen Sie die Konsistenz ihrer Ergebnisse zwischen den Teilaufgaben H23(f) und H23(g) und P29(a), P29(b) und P29(c).