Prof. Mosel **Wintersemester 2007/2008**
Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

Lösungen zu den Hausaufgaben für den 29.10.2007

H1-Lösung. (4 Punkte)
(a)

$$\vec{A}+\vec{B}=\begin{pmatrix}12\\3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\11\\10\end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\vec{A}-\vec{B}=\begin{pmatrix}12\\3\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\8\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\-5\\2\end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
|\vec{A}| &= \sqrt{12^2+3^2+6^2}=\sqrt{189}=13.75 && (3)\\
|\vec{B}| &= \sqrt{1^2+8^2+4^2}=9 && (4)\\
\vec{A}\cdot\vec{B} &= A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=12\cdot 1+3\cdot 8+6\cdot 4=60 && (5)\\
\vec{A}\times\vec{B} &= \vec{e}_x(A_yB_z-A_zB_y)+\vec{e}_y(A_zB_x-A_xB_z)+\vec{e}_z(A_xB_y-A_yB_x) && (6)\\
&= (-36,\ -42,\ 93) && (7)
\end{aligned}$$

(b) Dies ist einfach der Abstand $d=|(\vec{A}-\vec{B})|=|(11,\ -5,\ 2)|=\sqrt{11^2+(-5)^2+2^2}=\sqrt{150}=12.25$

H2-Lösung. (4 Punkte) Charakteristische Eigenschaft eines Projektionsoperators bzw. einer Projektionsvorschrift $\mathcal{P}$: ein zweites Anwenden läßt das Ergebnis unverändert: $\mathcal{P}^2=\mathcal{P}$.

- Zweite Anwendung der Parallelprojektion:

$$\begin{aligned}
\vec{b}_{||}{}' &= \frac{\vec{a}(\vec{b}_{||}\cdot\vec{a})}{a^2}=\frac{\vec{a}\left[\frac{1}{a^2}\left(\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{a})\right)\right]\cdot\vec{a}}{a^2} && (8)\\
&= \frac{\vec{a}\frac{(\vec{a}\cdot\vec{a})}{a^2}(\vec{b}\cdot\vec{a})}{a^2}=\frac{\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{a})}{a^2}=\vec{b}_{||} \quad . && (9)
\end{aligned}$$

- Zweite Anwendung der Senkrechtprojektion:

$$\vec{b}_s{}' = \frac{\vec{a}\times(\vec{b}_s\times\vec{a})}{a^2}=\frac{1}{a^4}\left\{\vec{a}\times\left[\left(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a})\right)\times\vec{a}\right]\right\} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{a^4}\left\{\vec{a}\times\left[\left(\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{a})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{a})\right)\times\vec{a}\right]\right\} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{a^4}\left\{\left[\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{a})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{a})\right](\vec{a}\cdot\vec{a})-\vec{a}\left[\vec{a}\cdot\left(\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{a})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{a})\right)\right]\right\} \tag{12}$$

$$= \frac{a^2}{a^4}\left[\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{a})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{a})\right]-\frac{1}{a^4}\underbrace{\left[\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{a})-\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{a})\right]}_{=0} \tag{13}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{a})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{a})\right]=\frac{1}{a^2}\left[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a})\right]=\vec{b}_s \quad . \tag{14}$$

H3-Lösung. (4 Punkte)

(a) Zu Zeigen:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{kmn}}_{=:A_l}=\underbrace{\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm}}_{=:A_r} \tag{15}$$

Fallunterscheidungen:

- $i=j\longrightarrow\epsilon_{iik}=0\ \ \forall\ k\longrightarrow A_l=0.$
  $A_r=\delta_{im}\delta_{in}-\delta_{in}\delta_{im}=0.$
  Also: $A_l=A_r$.
- Der Fall $m=n$ läßt sich genauso wie der Fall $i=j$ bearbeiten.

Beiträge können nur auftreten, falls sowohl $i\neq j$ als auch $m\neq n$ gilt. Sei nun $i\neq j$ als auch $m\neq n$. In diesem Falle gibt die Summe A_l nur dann Beiträge, wenn $i=m$ und $j=n$ oder $i=n$ und $j=m$ ist. Im Einzelnen ist:

$$i=m,\ j=n\longrightarrow A_l=\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{kij}=\begin{cases}1\cdot1=1 & \text{für } ijk \text{ zyklisch}\\(-1)\cdot(-1)=1 & \text{für } ijk \text{ antizyklisch}\end{cases} \tag{16}$$

$$A_r=1\cdot1-0\cdot0=1 \quad . \tag{17}$$

Also $A_r=A_l$. Ähnlich läuft die Argumentation für den Fall $i=n$ und $j=m$ (hier erhält man $A_l=-1=A_r$).

(b) Im allgemeinen lassen sich Skalar- und Vektorprodukt im Indexkalkül wie folgt ausdrücken:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_ib_i \tag{18}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})_m = \epsilon_{mij}a_ib_j \quad , \tag{19}$$

wobei über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist. Beachte, dass beim Skalarprodukt kein *fester* Index übrig bleibt, denn die skalare Multiplikation zweier Vektoren liefert eine Zahl, und keinen Vektor! Das Vektorprodukt hingegen ergibt wieder einen Vektor, also seine Darstellung im Indexkalkül muß einen festen Index enthalten (über diesen festen Index wird nicht summiert), der die verschiedenen Komponenten des Vektors wiedergibt.

Kommen wir zum Beweis der zu zeigenden Relation:

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \times \vec{b})_m (\vec{c} \times \vec{d})_m && (20)\\
&= \epsilon_{mij} a_i b_j \epsilon_{mkl} c_k d_l && (21)\\
&= a_i b_j c_k d_l \epsilon_{mij} \epsilon_{mkl} && (22)\\
&= a_i b_j c_k d_l (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) && (23)\\
&= a_k b_l c_k d_l - a_l b_k c_k d_l && (24)\\
&= a_k c_k \; b_l d_l - a_l d_l \; b_k c_k && (25)\\
&= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad . && (26)
\end{aligned}$$