H13 (a) Aus (P19): $\underline{\underline{v(t) = -gt - u\int_0^t \frac{\dot{m}(t')}{m(t')}dt'}}$

Lineare Massenabnahme: $m(t) = m_0 + \left(1 - \frac{t}{t_E}\right) m_T$ (1)

$$\Rightarrow \quad \dot{m}(t) = -\frac{m_T}{m_E} \quad (= \text{const.}!)$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = -gt + u\frac{m_T}{m_0}\int_0^t \frac{dt'}{m_0 + \left(1 - \frac{t'}{t_E}\right)m_T} =$$

$$= -gt + u\int_0^t \frac{dt'}{\left(1 + \frac{m_0}{m_T}\right)t_E - t'}$$

Letztes Integral ist vom Typ $\int dx \frac{1}{a-x}$, das leicht durch die Subst. $w = a - x \rightarrow dw = -dx \rightarrow -\int dw \frac{1}{w}$ bestimmt werden kann:

$$v(t) = -gt - u\ln(a - t')\Big|_0^t \quad \left(\text{mit } a \equiv \left(1 + \frac{m_0}{m_T}\right)t_E\right)$$

$$= -gt - u\{\ln(a-t) - \ln(a)\} = -gt - u\ln\left(\frac{a-t}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v(t) = -gt - u\ln\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{m_0}{m_T}} \cdot \frac{t}{t_E}\right)} \quad (2)$$

H13-2

(b) Der Treibstoff wird bei $\boxed{t=t_E}$ ganz aufgebraucht, denn aus Glg. (1)

$$m(t=t_E)=m_0+\left(1-\frac{\cancel{t_E}}{\cancel{t_E}}\right)m_T=m_0 \quad \checkmark$$

Also lautet die Endgeschw. v_E für $g=0$ und $t=t_E$:

$$v_E=v(t=t_E)=-u\ln\left(1-\frac{1}{1+\frac{m_0}{m_T}}\right)=$$

$$=-u\ln\left(\frac{\cancel{1}+\frac{m_0}{m_T}-\cancel{1}}{1+\frac{m_0}{m_T}}\right)$$

$$=u\ln\left(\frac{1+\frac{m_0}{m_T}}{m_0/m_T}\right) \Rightarrow v_E=u\ln\left(\frac{1}{m_0/m_T}+1\right)$$

oder

$$\boxed{v_E=u\cdot\ln\left(1+\frac{m_T}{m_0}\right)} \quad (3),$$

und stimmt mit dem Ergebnis aus P18(b) überein!

(c) Das Verhältnis $\frac{m_T}{m_0}$ ist also das gleiche wie in P19(c).

Check: Aus (3) $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{m_T}{m_0}=e^{v_E/u}-1}$$

Lösung der Hausaufgabe H14 (Bewegung einer Lokomotive mit Reibung)

H14(a)
Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} = -\alpha - \beta\dot{x}^2 \tag{1}$$

H14(b)
Die Bewegungsgleichung (1) wird nach Variablentrennung integriert:

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= -(\alpha + \beta v^2)\ , \\ \frac{m}{\beta}\int_{v=v_0}^{0} \frac{dv}{\alpha/\beta + v^2} &= -\int_{t=0}^{t_0} dt\ , \\ \frac{m}{\beta}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left(\arctan(0) - \arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}v_0\right)\right) &= -t_0 \quad . \end{aligned} \tag{2}$$

Die gesuchte Zeit t_0, nachdem die Lokomotive zum Stillstand kommt ist also:

$$\boxed{t_0 = \frac{m}{\sqrt{\alpha\beta}}\arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}v_0\right)} \quad . \tag{3}$$

H14(c)
Aus (3) erhält man im Grenzfall $v_0 \to \infty$:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} t_0 = \frac{m}{\sqrt{\alpha\beta}}\frac{\pi}{2}} \quad . \tag{4}$$