H18 Der einfachste Lösungsweg ist über den Energieerhaltungssatz,

$$\frac{k}{2}x_0^2 + \frac{m}{2}v_0^2 = \frac{k}{2}a^2\,,$$

was die Amplitude

$$a = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}$$

liefert, wobei $\omega = \sqrt{m/k}$ die Kreisfrequenz der Schwingung ist. Interessanterweise ist die resultierende Amplitude unabhängig vom Vorzeichen der Geschwindigkeit v_0.

9. Kleine Schwingungen

H19

9.1 Es werde ein eindimensionaler ungedämpfter Oszillator mit Masse m und Eigenfrequenz ω_o betrachtet, der sich für $t < 0$ in Ruhe und im stabilen Gleichgewicht befinden soll.

Für $t \geq 0$ wirke auf den Oszillator eine äußere Kraft $F_a = mft/\tau$. Man berechne $x(t)$ mittels eines geeigneten Ansatzes für die partikuläre Lösung. Welche Energie wird dem Oszillator in der ersten Periode zugeführt?

Lösung: Die Bewegungsgleichung des getriebenen Oszillators für $t \geq 0$ lautet:

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x = \frac{1}{m} F_a(t) = \frac{ft}{\tau}. \quad (1)$$

Eine partikuläre Lösung von (1) findet man mit dem Ansatz

$$x_p(t) = Ct. \quad (2)$$

Einsetzen von (2) in (1) liefert:

$$\omega_o^2 Ct = \frac{ft}{\tau}, \quad \text{also} \quad C = \frac{f}{\omega_o^2 \tau}.$$

Die allgemeine Lösung von (1) lautet daher:

$$x(t) = A \sin \omega_o t + B \cos \omega_o t + \frac{f}{\omega_o^2 \tau} t. \quad (3)$$

Die Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ geben für die Konstanten A und B:

$$B = 0, \quad A = -\frac{f}{\omega_o^3 \tau}. \quad (4)$$

Damit lautet die Lösung von (1):

$$\boxed{x(t) = \frac{f}{\omega_o^3 \tau} (\omega_o t - \sin \omega_o t).} \quad (5)$$

Die Schwingungsamplitude wächst also im wesentlichen linear mit der Zeit an.

$\Rightarrow v^2$ const

H20

gekoppelt!

$$\begin{pmatrix} \dot v_1 \\ \dot v_2 \\ \dot v_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{qB}{m}}_{=:\omega} \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_3(t) = v_{03} \rightsquigarrow \underline{\underline{x_3(t) = v_{03} \cdot t}}$

$\ddot v_1 = \omega \dot v_2 = -\omega^2 v_1 \qquad (*)$

$\ddot v_2 = -\omega \dot v_1 = -\omega^2 v_2$

– 1 –

~~$v_2(0) = 0 \rightsquigarrow x_2(t) = A \cdot \cos \omega t, \quad \dot x_2(t) = -A \sin \omega t = 0$~~

Schwingungsgleichungen:

$\boxed{\text{Ansatz:}}$ $\boxed{\begin{aligned} x_1(t) &= A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) + C \\ x_2(t) &= \hat A \sin(\omega t) + \hat B \cos(\omega t) + \hat C \end{aligned}}$

H20-2

~~3~~ 3

Bestimme Konstanten aus Anfangsbedingungen:

$$\dot{x}_1(t) = A\omega\cos(\omega t) + B\omega(-\sin(\omega t))$$
$$\dot{x}_2(t) = \hat{A}\omega\cos(\omega t) - \hat{B}\omega\sin(\omega t)$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(0) &= A\omega \overset{!}{=} v_{01} \\ \dot{x}_2(0) &= \hat{A}\omega \overset{!}{=} 0\end{aligned}\right\} \quad A = \frac{v_{01}}{\omega}, \quad \hat{A} = 0$$

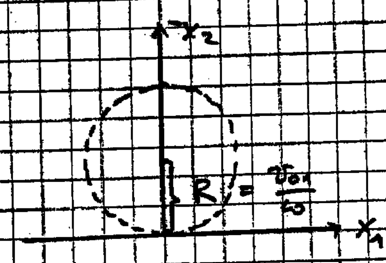
$$\left.\begin{aligned}x_1(0) &= B + C \overset{!}{=} 0 \\ x_2(0) &= \hat{B} + \hat{C} \overset{!}{=} 0\end{aligned}\right\} \quad C = -B, \quad \hat{C} = -\hat{B}$$

$$\ddot{x}_2(t) = -\hat{A}\omega^2\sin(\omega t) - \hat{B}\omega^2\cos(\omega t)$$

$$(*) \Rightarrow \ddot{x}_2(t) = -\omega\, x_1(t) \Rightarrow \hat{A} = -B, \quad \hat{B} = +A$$

$$\Rightarrow A = \hat{B} = -\hat{C} = \frac{v_{01}}{\omega}, \quad B = -\hat{A} = -C = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{v_{01}}{\omega}\sin(\omega t) \\ x_2(t) &= \frac{v_{01}}{\omega}\cos(\omega t) - \frac{v_{01}}{\omega} \\ x_3(t) &= v_{03}\cdot t\end{aligned}}$$



$$|x_{2,max}| = \frac{2v_{01}}{\omega}$$

Helix mit Umlaufzeit $\omega T = 2\pi$

$$\underline{\underline{R = \frac{v_{01}}{\omega}}}, \quad \text{Steighöhe } \underline{\underline{h = v_{03}\cdot T = \frac{2\pi v_{03}}{\omega}}}$$

und $\underline{\underline{\omega = \frac{qB}{m}}}$