P19

(a) Bewegungsglg: $\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \eta r^3 \vec{r}}$ (1)

(b) kin. Energie: $E_{kin} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$

(c) Potential: $\vec{F} = -\vec{\nabla} V \rightsquigarrow V = -\int_{\vec{r}_0 = 0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}\,'$

Also

$$V = -\eta \int_0^{\vec{r}} r^3 \vec{r}\,' \cdot d\vec{r}\,'$$

Trick: $\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{1}{2} d(\vec{r}^{\,2}) = \frac{1}{2} d(r^2) = r\,dr$!

$\Rightarrow$

$$V = -\eta \int_0^r r'^3 r' dr' = -\eta \frac{r^5}{5}$$

(d) $E = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - \eta \frac{r^5}{5}$. Zu zeigen $\dot{E} \overset{!}{=} 0$

Es ist $\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}^2) = 2\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}$

NR: $\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}^2) = \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = (2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z}) =$

$= 2\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}$ ✓

Weiter: $\frac{d}{dt} r^5 = \frac{d}{dt}(x^2+y^2+z^2)^{5/2} = \frac{5}{\cancel{2}}(x^2+y^2+z^2)^{3/2} \cdot \cancel{2}(x \cdot \dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})$

$= 5 r^3 \cdot \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$;

$\Rightarrow$

$$\dot{E} = m\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} - \eta r^3 \vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} =$$

$$\left.\begin{aligned} &= \left(m\ddot{\vec{r}} - \eta r^3 \vec{r}\right)\cdot\dot{\vec{r}} \\ &m\ddot{\vec{r}} = \eta r^3 \vec{r} \end{aligned}\right\} = \left(\eta r^3 \vec{r} - \eta r^3 \vec{r}\right)\cdot\dot{\vec{r}} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{E} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{E = \text{const}}}$$

~~[illegible]~~: $\vec{\nabla} \times \vec{F} \overset{!}{=} \vec{0}$ $\boxed{\text{Zusatz zu P19}}$

$$\left(\eta\, \vec{\nabla} \times r^3 \vec{r}\right)_i = \eta\, \varepsilon_{ijk} \partial_j (r^3 r_k) =$$

$$= \eta\, \varepsilon_{ijk} \left[(\partial_j r^3) r_k + r^3 \partial_j r_k \right]$$

$$\partial_j r^3 = 3 r^2 \partial_j r \ ; \ \partial_j r = \partial_j (r_i r_i)^{1/2} = \frac{1}{2} (r_i r_i)^{-1/2} \underbrace{\partial_j (r_i r_i)}_{2 r_i \underbrace{\partial_j r_i}_{\delta_{ij}} = 2 r_j} \overset{\uparrow}{=} \frac{r_j}{r}$$

$$\Rightarrow \partial_j r^3 = 3 r r_j$$

$$\Rightarrow \left(\vec{\nabla} \times r^3 \vec{r}\right)_i = 3 \varepsilon_{ijk} r r_j r_k + r^3 \underbrace{\varepsilon_{ijk} \delta_{jk}}_{=0}$$

Anfangsbedingungen

P20

Stein 1: $\quad \dot{x}_1(t=0) = v_0 \quad , \quad x_1(t=0) = 0$

Stein 2: $\quad \dot{x}_2(t=\Delta t) = v_0 \quad , \quad x_2(t=\Delta t) = 0$

(a) Bewegungsgleichung (t_0 = Startzeitpunkt)

$$\ddot{x}(t) = -g \quad \Rightarrow \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = -g \quad \xRightarrow{\text{Trennung der Variablen}} \quad \int_{\dot{x}(t_0)}^{\dot{x}(t)} d\dot{x}' = -g \int_{t_0}^{t} dt'$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{x}(t) = -g(t-t_0) + \dot{x}(t_0)}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -g(t-t_0) + \dot{x}(t_0) \quad \xRightarrow{\text{Trennung der Variablen}} \quad \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx' = \int_{t_0}^{t} dt' \left(-g(t'-t_0) + \dot{x}(t_0)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x(t) = -\frac{1}{2}g(t-t_0)^2 + \dot{x}(t_0)(t-t_0) + x(t_0)}}$$

$\rightarrow$ Bewegungsgleichung für Stein 1 : $\quad t_0 = 0 \; , \; \dot{x}(t_0) = v_0$

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \cdot t$$

$\rightarrow$ Bewegungsgleichung für Stein 2 : $\quad t_0 = \Delta t \; , \; \dot{x}(t_0) = v_0$

$$x_2(t) = -\frac{1}{2}g(t-\Delta t)^2 + v_0(t-\Delta t)$$

(b) Wann treffen sich die beiden Steine : $t_c = ?$

$$x_1(t_c) \stackrel{!}{=} x_2(t_c)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}gt_c^2 + v_0 t_c = -\frac{1}{2}g\left(t_c^2 - 2t_c\Delta t + \Delta t^2\right) + v_0(t_c - \Delta t)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{2}g\Delta t^2 + g t_c \Delta t - v_0 \Delta t$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{t_c}} = \frac{\frac{1}{2}g\Delta t^2 + v_0\Delta t}{g\Delta t} = \underline{\underline{\frac{v_0}{g} + \frac{\Delta t}{2}}}$$

(c) Geschwindigkeit beim Treffen:

$$\dot{x}_1(t_c) = -gt + v_0 \Big|_{t=t_c} = -g\left(\frac{v_0}{g} + \frac{\Delta t}{2}\right) + v_0 = -v_0 - \frac{1}{2}g\Delta t + v_0$$

(abwärts ↓)

$$= -\frac{1}{2}g\Delta t$$

$$\dot{x}_2(t_c) = -g(t-\Delta t) + v_0 \Big|_{t=t_c} = -g\left(\left(\frac{v_0}{g} + \frac{\Delta t}{2}\right) - \Delta t\right) + v_0$$

$$= -v_0 - \frac{1}{2}g\Delta t + g\Delta t + v_0 = +\frac{1}{2}g\Delta t$$

(aufwärts ↑)

→ Die Geschwindigkeiten der beiden Steine sind zum Zeitpunkt der Kollision t_c gleich groß (d.h. Betrag), jedoch entgegengerichtet.