Prof. Mosel — Wintersemester 2007/2008
Übungen zu "Mathematische Methoden der Physik"

Alternative Lösung zur Präsenzaufgabe P18(a) (Raketenantrieb-I)

P18(a)

Die Lösung von P18(a) kann man auch viel leichter auswerten. In der Musterlösung von P18(a) wurde folgender Ausdruck hergeleitet:

$$\boxed{v(t) = -gt - u\int_0^t \frac{\dot{m}(t')}{m(t')}\,dt'} \quad . \tag{1}$$

Die Stammfunktion zum Integral (1) ist einfach der Logarithmus von $m(t)$, denn es ist

$$\frac{d}{dt}\ln(m(t)) = \frac{1}{m(t)}\frac{d}{dt}m(t) = \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \quad . \tag{2}$$

Somit läßt sich das Integral in (1) in einer Zeile lösen:

$$v(t) = -gt - u\int_0^t \frac{\dot{m}(t')}{m(t')}\,dt' = -gt - u\left[\ln(m(t'))\right]\Big|_0^t = -gt - u\left[\ln(m(t)) - \ln(m(t=0))\right] \quad . \tag{3}$$

Die weitere Lösung der P18(a) verläuft dann genauso wie in der Originalmusterlösung. Der Vollständigkeit halber wird die Rechnung hier nochmal wiederholt.
Man setzt also die Relation

$$m(t) = m_0 + \frac{m_T}{1+\frac{t}{\tau_0}} \tag{4}$$

für die zeitabhängige Masse in (3) zu den Zeiten t und $t = 0$ ein, und es ergeben sich folgende triviale Umformungen:

$$\begin{aligned}
v(t) &= -gt - u\left[\ln\left(m_0 + \frac{m_T}{1+\frac{t}{\tau_0}}\right) - \ln(m_0 + m_T)\right] \\
&= -gt - u\left[\ln\left(\frac{m_0 + \frac{m_0 t}{\tau_0} + m_T}{1+\frac{t}{\tau_0}}\right) - \ln(m_0 + m_T)\right] \\
&= -gt + u\left[\ln(m_0 + m_T) + \ln\left(1+\frac{t}{\tau_0}\right) - \ln\left(m_0 + \frac{m_0 t}{\tau_0} + m_T\right)\right] \\
&= -gt + u\left[\ln\left(1+\frac{t}{\tau_0}\right) - \ln\left(\frac{m_0 + \frac{m_0 t}{\tau_0} + m_T}{m_0 + m_T}\right)\right] \\
&= -gt + u\ln\left[\frac{\left(1+\frac{t}{\tau_0}\right)\left(1+\frac{m_T}{m_0}\right)}{1+\frac{m_T}{m_0}+\frac{t}{\tau_0}}\right] \quad .
\end{aligned} \tag{5}$$