6) Die Berechnung der Bahnkurve $r(\varphi)$ läuft analog zu der in Teil 3):

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{\dot r} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}\frac{1}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{r_{\max}}{r}\right)^2-1}}.$$

Mit $\varphi(r_{\max}) = 0$ und der Substitution $y = \frac{r_{\max}}{r}$ folgt:

$$dy = -\frac{r_{\max}}{r^2}dr.$$

Es folgt weiter:

$$\varphi = \frac{L}{r_{\max}\sqrt{2m|E|}}\int_{r_{\max}/r}^{1}\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = \frac{-L}{r_{\max}\sqrt{2m|E|}}\operatorname{arccosh}\left(\frac{r_{\max}}{r}\right).$$

Aus dem Energiesatz erkennt man noch:

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{2m|\alpha| - L^2}{2m|E|}}.$$

Dieses oben eingesetzt ergibt schließlich:

$$r(\varphi) = \sqrt{\frac{2m|\alpha| - L^2}{2m|E|}}\cdot\frac{1}{\cosh\left(\sqrt{\frac{2m|\alpha|}{L^2}-1}\cdot\varphi\right)}.$$

Dieses ist die Gleichung einer Spirale. Das Teilchen landet nach unendlich vielen Umläufen ($\varphi \to \infty$), aber nach endlicher Zeit t_0, im Zentrum $r = 0$.

[redacted]

+27

(a)

$$\dot{\mathbf{A}} = (\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) + (\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{L}}) + (\operatorname{grad} V \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} + V(r)\,\dot{\mathbf{r}}\,.$$

Im Zentralpotential ist $\dot{\mathbf{L}} = 0$ und außerdem:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{1}{m}\frac{dV}{dr}\mathbf{e}_r.$$

Dies hat zur Folge:

$$\dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{m}\frac{dV}{dr}\frac{m}{r}[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] + \frac{dV}{dr}\frac{1}{r}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} + V(r)\,\dot{\mathbf{r}} =$$

$$= \dot{\mathbf{r}}\left[r\frac{dV}{dr} + V(r)\right] = 0 \quad \text{für } V(r) = -\frac{\alpha}{r}.$$

(b) 2) Den Betrag des Lenz-Vektors erhalten wir aus:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = [(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) + V(r)\mathbf{r}] \cdot [(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) + V(r)\mathbf{r}]\,.$$

Beim Zentralpotential ist $\dot{\mathbf{r}} \perp \mathbf{L}$:

$$\mathbf{A}^2 = \dot{\mathbf{r}}^2\,\mathbf{L}^2 + V(r)\,[\mathbf{r}\cdot(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) + (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L})\cdot\mathbf{r}] + V^2(r)\mathbf{r}^2.$$

Mit

$$(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L})\cdot\mathbf{r} = \mathbf{L}\cdot(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \frac{L^2}{m}$$

folgt weiter:

$$\mathbf{A}^2 = \frac{2L^2}{m}\left[V(r) + \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2\right] + V^2(r)\mathbf{r}^2$$

$$\Longrightarrow |\mathbf{A}| = \sqrt{\alpha^2 + \frac{2L^2}{m}E}.$$

(c) 3)

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{r} = (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L})\cdot\mathbf{r} + V(r)r^2 = \frac{L^2}{m} + V(r)r^2 = |A|r\cos\varphi.$$

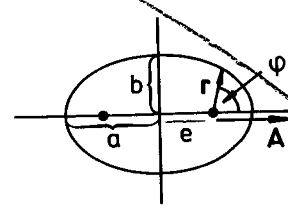
Setzt man

$$\epsilon = \frac{|\mathbf{A}|}{\alpha} = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{m\alpha^2}E}; \quad k = \frac{L^2}{m\alpha},$$

dann gilt:

$$r = \frac{k}{1 + \epsilon\cos\varphi}.$$

Für $E < 0$ folgt: $\epsilon < 1 \Longrightarrow$ Ellipse,
für $E > 0$ folgt: $\epsilon > 1 \Longrightarrow$ Hyperbel.



A liegt in der Bahnebene, weist vom Zentrum zum Perihel und hat den Betrag

$$\alpha\epsilon = \alpha\frac{e}{a}.$$

Kapitel 3.3

Lösung zu Aufgabe 3.3.1

1) Auf m_1 wirken die Kräfte:

$$F_1 = -k_1(x_1 - x_{01}),$$
$$F_{12} = -k_{12}\,[(x_1 - x_{01}) - (x_2 - x_{02})]\,.$$

H28

(a) Für einen Beobachter auf der Erde geht die "Uhr" des Myons langsamer (Zeitdilatation)

$\Rightarrow$ Myon lebt länger, und somit erreicht es die Erde bevor es zerfällt:

$$\left.\begin{aligned} T_{ERDE} &= \gamma \cdot T \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx \underline{\underline{50}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{T_{ERDE}}} = 50 \cdot 2\,\mu sec = \underline{\underline{100\,\mu sec}}$$

$v \approx 0.9998\,[c]$

Lebensdauer des Myons für einen ruhenden Beobachter auf der Erde.

Also: Wegstrecke s: $s = v \cdot T_{ERDE} = 0.9998 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 100 \cdot 10^{-6} sec$

$\approx \underline{\underline{30\,Km}}$ $\Rightarrow$ Wird also detektiert! ✓

(b) ~~Fuer~~ Für das Myon selbst (Im bewegten Bezugssystem des Myons) ergibt sich die Längenkontraktion als der wesentliche Effekt: Vom Standpunkt des Myons ~~bewegt~~ bewegt sich nun die Erde auf ihn zu, so daß der zurückgelegte Weg von ~~der~~ der Erzeugung des Myons bis zu seinem Zerfall um den Faktor γ kontrahiert ist!

$\Rightarrow s_{Myon} = \frac{s_{Erde}}{\gamma} \simeq \frac{20\,km}{50} \cong \underline{\underline{400\,m}}$, und dies kleiner als die Wegstrecke, nach der das Myon nach "$2\,\mu sec$" zerfällt! ✓