Lösung zu Aufgabe 1.5.5

Kartesische Koordinaten: $R^2 = x_1^2 + x_2^2$,
ebene Polarkoordinaten: $R = \rho$.

Lösung zu Aufgabe 1.5.6

P27(a)

-1-

1) Vektorfeld in Zylinderkoordinaten:

$$\mathbf{a} = a_\rho \mathbf{e}_\rho + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi + a_z \mathbf{e}_z.$$

Zu bestimmen sind a_ρ, a_φ, a_z! Für die Einheitsvektoren gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\rho &= \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2,\\
\mathbf{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\mathbf{e}_1 + \cos\varphi\,\mathbf{e}_2,\\
\mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

Die Umkehrung lautet:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \cos\varphi\,\mathbf{e}_\rho - \sin\varphi\,\mathbf{e}_\varphi,\\
\mathbf{e}_2 &= \sin\varphi\,\mathbf{e}_\rho + \cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi,\\
\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_z.
\end{aligned}$$

Mit den Transformationsformeln

$$x_1 = \rho\cos\varphi; \quad x_2 = \rho\sin\varphi; \quad x_3 = z$$

erhalten wir dann durch Einsetzen:

$$\mathbf{a} = z(\cos\varphi\,\mathbf{e}_\rho - \sin\varphi\,\mathbf{e}_\varphi) + 2\rho\cos\varphi(\sin\varphi\,\mathbf{e}_\rho + \cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi) + \rho\sin\varphi\,\mathbf{e}_z.$$

Durch Vergleich folgt schließlich:

$$\begin{aligned}
a_\rho &= z\cos\varphi + 2\rho\sin\varphi\cos\varphi,\\
a_\varphi &= -z\sin\varphi + 2\rho\cos^2\varphi,\\
a_z &= \rho\sin\varphi.
\end{aligned}$$

2) Vektorfeld in Kugelkoordinaten:

$$\mathbf{a} = a_r\,\mathbf{e}_r + a_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + a_\varphi\,\mathbf{e}_\varphi.$$

Mit

$$x_1 = r\sin\vartheta\cos\varphi; \quad x_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi; \quad x_3 = r\cos\vartheta$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \cos\varphi\sin\vartheta\,\mathbf{e}_r + \cos\varphi\cos\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta - \sin\varphi\,\mathbf{e}_\varphi,\\
\mathbf{e}_2 &= \sin\varphi\sin\vartheta\,\mathbf{e}_r + \sin\varphi\cos\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta + \cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi,\\
\mathbf{e}_3 &= \cos\vartheta\,\mathbf{e}_r - \sin\vartheta\,\mathbf{e}_\vartheta
\end{aligned}$$

P27

(b) Einheitsvektoren der Zylinderkoordinaten $\qquad \vec{e}_k = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial k}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial k}\right|}$

- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right| = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^{1/2} = 1$

  $\Rightarrow \vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| = (\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi)^{1/2} = \rho$

  $\Rightarrow \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_z$

Offensichtlich $\vec{e}_z \perp \vec{e}_\rho$, $\vec{e}_z \perp \vec{e}_\varphi$

$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = 0$ ✓

(c) $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ bilden Rechtssystem, denn

$$\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_z$$

zyklisch $\Rightarrow \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_\rho$, $\vec{e}_z \times \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi$

P28 (a) Die Divergenz eines Vektorfeldes in krummlinigen Koordinaten lautet gemäß Vorlesung:

P28-1

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}(F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}(F_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}(F_3 h_1 h_2)\right] \quad (1)$$

Der Laplace-Operator ist definiert als $\Delta \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$; angewendet auf eine beliebige skalare Funktion haben wir also:

$$\Delta f = \vec{\nabla}\cdot(\underbrace{\vec{\nabla} f}_{\text{Gradient}})$$

Der Gradient nun in krummlinigen Koordinaten lautet:

$$\vec{\nabla}_i f = \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \quad (2)$$

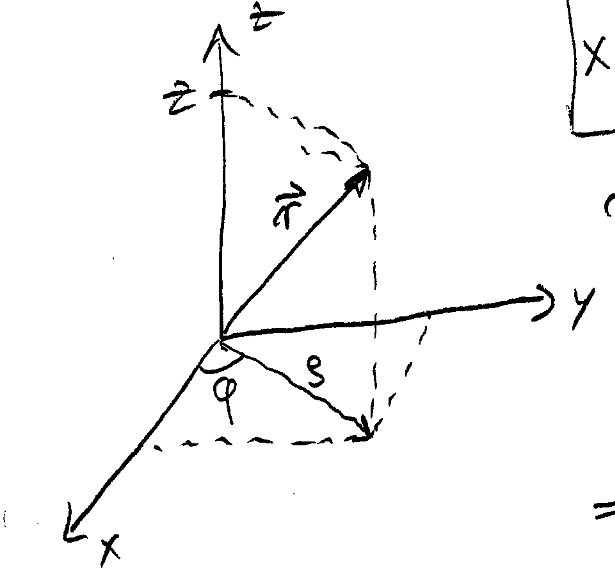
Durch Kombination der Ausdrücke für den Gradienten (2) und die Divergenz (1) erhält man den Laplace-Operator Δ in krummlinigen Koordinaten:

$$\Delta f = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla} f) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\left(h_2 h_3 \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial \xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(h_3 h_1 \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial \xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(h_1 h_2 \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial \xi_3}\right)\right] \quad (3)$$

✓

(b) Anwendung von (3) auf

(i) Zylinderkoordinaten: $\boxed{\begin{array}{l}\xi_1=\rho;\ \xi_2=\varphi;\ \xi_3=z\\ x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi;\ z=z.\end{array}}$



$$\Rightarrow h_1 \equiv h_\rho = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\right| = \left|(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\right| =$$

$$= \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{h_1 = 1}$$

$$h_2 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right| = \left|(-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)\right| = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi} =$$

$$= \rho \Rightarrow \boxed{h_2 = \rho}$$

$$h_3 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right| = \left|(0, 0, 1)\right| \Rightarrow \boxed{h_3 = 1}$$

$$\left.\right\} \underline{\underline{h_1 h_2 h_3 = \rho}}$$

$$\Rightarrow$$

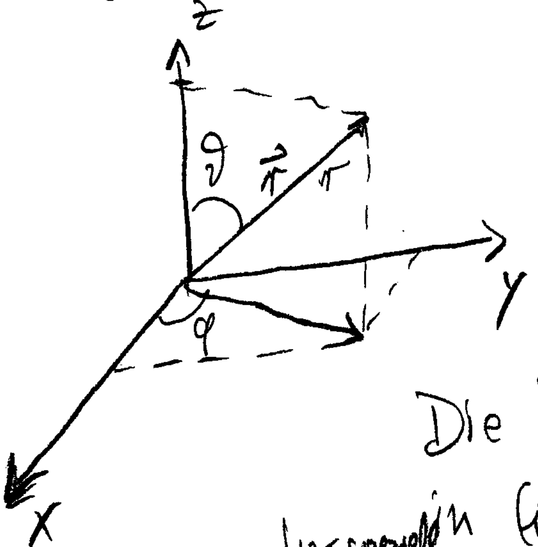
$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]$$

<u>oder</u>

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2 f}{\partial z}}$$

B

(ii) Kugelkoordinaten:



$$\boxed{\begin{aligned} &\xi_1 = r;\ \xi_2 = \vartheta;\ \xi_3 = \varphi \\ &x = r\cos\varphi\sin\vartheta \\ &y = r\sin\varphi\sin\vartheta \\ &z = r\cos\vartheta \end{aligned}}$$

Die Vorgehensweise ist ähnlich wie in (i):

$$h_1 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi_1}\right| \overset{\text{hier speziell}}{=} \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = \left|\left(\cos\varphi\sin\vartheta, \sin\varphi\sin\vartheta, \cos\vartheta\right)\right| =$$

$$= \sqrt{\sin^2\vartheta\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1}+\cos^2\vartheta} = \sqrt{\underbrace{\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta}_{=1}} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{h_1 = 1}$$

$$h_2 = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi_2}\right| \underset{\text{hier speziell}}{=} \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}\right| = \left|\left(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, -r\sin\vartheta\right)\right| =$$

$$= \sqrt{r^2\Big[\underbrace{\cos^2\vartheta\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+\sin^2\vartheta}_{=1}\Big]} = r$$

$$\Rightarrow \boxed{h_2 = r}$$

P28-4

$$h_3 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_3}\right| \underset{\uparrow}{=} \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| =$$

hier spezielle

$$= \left|\left(-r\sin\varphi\sin\vartheta,\ r\cos\varphi\sin\vartheta,\ -r\,0\right)\right| =$$

$$= \sqrt{r^2\left[\sin^2\vartheta\,(\underbrace{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}_{=1})\right]+0} = r\sin\vartheta$$

$$\Rightarrow \boxed{h_3 = r\sin\vartheta}$$

$\Rightarrow h_1h_2h_3 = r^2\sin\vartheta$ und weiter

$$\Delta f = \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\vartheta\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\cancel{r}\sin\vartheta\,\frac{1}{\cancel{r}}\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cancel{r}\,\frac{1}{\cancel{r}\sin\vartheta}\,\frac{\partial f}{\partial\varphi}\right)\right]$$

oder

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}}$$

Selected Solutions to Problems

P29

C.1 Chapter 2 Problems

Problem 2-1

(a) In the spaceship frame, events 1 and 2 do not occur at the same space point, that is, event 2 occurs on Earth. However, both events 1 and 2 occur at the same place in the Earth frame, so it is a proper time interval in the Earth frame.

(b) Following the same reasoning as in part (a), the time interval between events 2 and 3 is not a proper time interval in either frame.

(c) The time interval between events 1 and 3 is a proper time interval in the spaceship frame, but not in the Earth frame.

(d) Because the time between events 1 and 2 is proper time interval in the Earth frame, all that the spaceship sees is a dilated time value,

$$t_2' = \gamma t_e = \frac{10}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\text{min} = 12.5\,\text{min}.$$

(g)

(h)