Prof. Mosel — Wintersemester 2007/2008

Übungen zu “Mathematische Methoden der Physik”

Lösungen zu den Präsenzaufgaben für den 22.10.2007

P1-Lösung.

(a) Der Betrag eines Vektors $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$ ist im allgemeinen gegeben durch:

$$|\vec{A}| \equiv A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad . \tag{1}$$

Somit erhalten wir für die hier angegebenen Vektoren:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| \equiv a &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \\ |\vec{b}| \equiv b &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \\ |\vec{c}| \equiv c &= \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{38} \quad . \end{aligned} \tag{2}$$

(b) Das *Skalarprodukt* (auch *Inneres Produkt* genannt) zweier Vektoren $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$ und $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$, ausgedrückt durch $\vec{A}\cdot\vec{B}$, ist die **Zahl** $\vec{A}\cdot\vec{B} = |A||B|cos(\vec{A},\ \vec{B})$, und kann wie folgt berechnet werden:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad . \tag{3}$$

Das *Vektorprodukt* (auch *Äusseres Produkt* genannt) zweier Vektoren $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$ und $\vec{B} = B_x\vec{e}_x + B_y\vec{e}_y + B_z\vec{e}_z$, ist derjenige **Vektor** $\vec{C} := \vec{A}\times\vec{B}$, der folgende Eigenschaften besitzt:

$$\begin{array}{l} \text{Sein Betrag ist } |A||B|sin(\vec{A},\ \vec{B}) \\ \text{Seine Richtung ist senkrecht auf } \vec{A} \text{ und } \vec{B} \\ \vec{A},\ \vec{B},\ \vec{C} \text{ bilden ein Rechtssystem.} \quad . \end{array} \tag{4}$$

Das Vektorprodukt kann wie folgt berechnet werden:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix} \quad . \tag{5}$$

oder

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{e}_z \quad . \tag{6}$$

Für die in dieser Aufgabe angegebenen Vektoren haben wir also

$$\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{b} &= 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 + 3\cdot 1 = 6 \\ \vec{a}\cdot\vec{c} &= 1\cdot 5 + 2\cdot(-2) + 3\cdot 3 = 10 \\ \vec{b}\times\vec{c} &= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 - 1\cdot(-2) \\ 1\cdot 5 - (-1)\cdot 3 \\ (-1)\cdot(-2) - 2\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

(c) Mit Hilfe der Ergebnisse aus Teil (b) kann man nun die angegebene allgemeine Relation verifizieren, indem man die linke und rechte Seite dieser Relation berechnet. Die Auswertung der linken Seite ergibt:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= 8 \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 32 \\ -8 \end{pmatrix} \quad . \qquad (8)
\end{aligned}$$

Die Auswertung der rechten Seite ergibt:

$$\begin{aligned}
\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} 6 \\
&= \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 32 \\ -8 \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}$$

Somit haben wir die algemeine Relation $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ anhand der hier angegebenen Vektoren bewiesen.

P2-Lösung.

(a) Orthogonalität heißt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, also: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 0$. Die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal.

(b) Gesucht ist hier ein Vektor $\vec{c} = (c_x,\ c_y,\ c_z)$ für den gilt: $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ und $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, woraus sich zwei Gleichungen mit 3 Unbekannten ergeben:

$$\begin{aligned}
c_x + 2c_y + 3c_z &= 0 \\
-2c_x + 4c_y - 2c_z &= 0 \quad . \qquad (9)
\end{aligned}$$

Ein Unbekannter ist frei wählbar. Die Wahl $c_x = 4$ ergibt:

$$4 + 2c_y + 3c_z = 0 \qquad (10)$$

$$-8 + 4c_y - 2c_z = 0 \quad . \qquad (11)$$

Multiplikation der Glg. (10) mit 2 und deren Subtraktion von der Glg. (11) ergibt: $c_z = -2$ und $c_y = 1$. Der Gesuchte Vektor ist also: $\vec{c} = (4,\ 1,\ -2)$, der orthogonal auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

(c) Gesucht sind also die Vektoren $\vec{A},\ \vec{B},\ \vec{C}$, für die gilt:

$$\vec{A} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}, \quad \vec{C} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \quad , \qquad (12)$$

denn die so definierten Vektoren $\vec{A},\ \vec{B},\ \vec{C}$ haben den Betrag 1 und zeigen sie jeweils in Richtung von $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$. Man muß also nur noch die Beträge von $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ berechnen, um das Ergebnis anzugeben:

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2} = \sqrt{24} \\ |\vec{c}| &= \sqrt{4^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{21} \quad . \end{aligned} \tag{13}$$

Das Ergebnis lautet also:

$$\vec{A} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{14}}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{b}}{\sqrt{24}}, \quad \vec{C} = \frac{\vec{c}}{\sqrt{21}} \quad , \tag{14}$$

P3-Lösung. Laut Definition müssen $\vec{b}_{||}$ und $\vec{b}_s$ senkrecht zueinander stehen, was hier als erstes zu überprüfen ist:

$$\vec{b}_{||}\cdot\vec{b}_s = \left[\frac{\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{a})}{a^2}\right]\cdot\left[\frac{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a})}{a^2}\right] = \frac{1}{a^4}\left[\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{a})\right]\cdot\left[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a})\right] \tag{15}$$

$$= \frac{1}{a^4}\left[(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{a}\cdot\left(\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{a})-\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{a})\right)\right] \tag{16}$$

$$= \frac{1}{a^4}\left[(\vec{b}\cdot\vec{a})(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{a})-(\vec{b}\cdot\vec{a})(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{a})\right] \tag{17}$$

$$= \frac{1}{a^4}a^2\left[(\vec{b}\cdot\vec{a})(\vec{a}\cdot\vec{b})-(\vec{b}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{a})\right] = \frac{1}{a^2}\left[(\vec{b}\cdot\vec{a})^2-(\vec{b}\cdot\vec{a})^2\right] = 0 \quad . \tag{18}$$

- Beim Schritt (15) wurden die beiden Vektoren einfach eingesetzt und Assoziativität des Skalarproduktes benutzt.
- Beim Schritt (16) wurde $\alpha\vec{A} = \vec{A}\alpha,\ \alpha \in \mathcal{R}$ benutzt, mit $\alpha \equiv (\vec{b}\cdot\vec{a})$ (die skalare Multiplikation zweier Vektoren ergibt eine Zahl!). Weiterhin wurde der allgemeine Entwicklungssatz für das 3-fache Vektorprodukt $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ mit der Ersetzung $\vec{c}\to\vec{a}$ benutzt, sowie die Kommutativität des Skalarproduktes ($\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$).
- Beim Schritt (17) wurden das Distributiv- und Assoziativgesetz angewandt, d.h. skalare Multiplikation des Vektors $(\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{a}$ jeweils mit den Vektoren $\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{a})$ und $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{a})$.
- Beim letzten Schritt (18) wurde der Betrag $(\vec{a}\cdot\vec{a}) = |\vec{a}|^2 = a^2$ (dies ist eine Zahl!) aus der eckigen Klammer ausgezogen, und die Kommutativität des Skalarproduktes benutzt.

Nach dem gleichem Muster werden die Ausdrücke $\vec{a}\cdot\vec{b}_{||},\ \vec{a}\cdot\vec{b}_s,\ \ \vec{b}_{||}+\vec{b}_s$ ausgewertet:

- Auswertung von $\vec{a}\cdot\vec{b}_{||}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}_{||} = \vec{a}\cdot\frac{\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{a})}{a^2} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{a})}{a^2} = \frac{a^2}{a^2}(\vec{b}\cdot\vec{a}) = (\vec{b}\cdot\vec{a}) \quad . \tag{19}$$

Das Ergebnis ist also die übliche Projektion eines Vektors auf einen anderen.

- Auswertung von $\vec{a} \cdot \vec{b}_s$:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b}_s &= \vec{a} \cdot \frac{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})}{a^2} \\
&= \frac{1}{a^2} \vec{a} \cdot \left[\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{a}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{a})\right] \\
&= \frac{1}{a^2} \left[(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{a}) - \vec{a} \cdot \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{a})\right] = 0 \quad .
\end{aligned} \tag{20}$$

  Das Ergebnis ist plausibel, denn per Definition steht der Vektor $\vec{b}_s$ senkrecht auf den Vektor $\vec{a}$, also das Skalarprodukt zwischen $\vec{b}_s$ und $\vec{a}$ muß Null ergeben.

- Auswertung von $\vec{b}_{||} + \vec{b}_s$:

$$\begin{aligned}
\vec{b}_{||} + \vec{b}_s &= \frac{\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{a})}{a^2} + \frac{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})}{a^2} \\
&= \frac{1}{a^2} \left[\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{a}) + \left(\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{a}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{a})\right)\right] \\
&= \frac{1}{a^2} \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{a}) = \vec{b}\, \frac{(\vec{a} \cdot \vec{a})}{a^2} = \vec{b}\, \frac{a^2}{a^2} = \vec{b} \quad .
\end{aligned} \tag{21}$$