P24. Die Anwendung des Additionstheorems $\cos(\omega t - \phi) = \cos\omega t \cos\phi + \sin\omega t \sin\phi$ führt nach Koeffizientenvergleich auf

$$A = C\sin\phi\,, \quad B = C\cos\phi\,,$$

was

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}\,, \quad \phi = \arctan(A/B)$$

liefert.

P25 -1

7.2.3 Beispiel zur erzwungenen Oszillation

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \quad\quad t > T \\ F_0 & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$ mit $c = 0$, keine Dämpfung.

Da hier die wirkende Kraft in den verschiedenen Zeitintervallen konstant ist, bietet es sich an, die Bewegungsgleichung für die verschiedenen Intervalle separat zu lösen und evtl. noch verbleibende freie Konstanten durch Stetigkeitsbedingungen für die Lösung an den Grenzen der Intervalle zu bestimmen.

1. $t < 0$

   Hier sei das System in Ruhe bei $x = 0$.

2. $0 \leq t \leq T$

   Während die Kraft wirkt erwartet man eine Auslenkung, die entsprechend dem Hooke'schen Gesetz direkt proportional zur Kraft ist, überlagert von einer harmonischen Oszillation, die durch den plötzlichen Beginn der Kraft bei $t = 0$ hervorgerufen wird. Daher Lösungsansatz mit freien Konstanten A, B und ω

$$\begin{aligned} x(t) &= A + Be^{i\omega t}\ ; \quad A, B = \text{const.} \\ \dot{x}(t) &= i\omega Be^{i\omega t}\ ; \quad \ddot{x}(t) = -\omega^2 Be^{i\omega t} \end{aligned} \tag{334}$$

   Eingesetzt liefert dies

$$\begin{aligned} -m\omega^2 Be^{i\omega t} + k\left(A + Be^{i\omega t}\right) &= F(t) \\ B\left(k - \omega^2 m\right)e^{i\omega t} + kA &= F_0 \end{aligned} \tag{335}$$

   $kA = F_0$ und $k = \omega^2 m$ lösen diese DGL. Damit erhält man für die Amplitude

$$x(t) = \frac{F_0}{k} + Be^{i\omega t} \tag{336}$$

P25-2

3. $t \geq T$

Nach Abschalten der Kraft erwartet man eine freie harmonische Schwingung. Daher wird hier der Ansatz:

$$x_2(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \tag{337}$$

gemacht.

Nachdem die allgemeinen Lösungen in den Teilbereichen der zeitlichen Entwicklung bekannt sind, werden jetzt die Stetigkeitsbedingungen ausgenutzt. Die Bedingung stetiger Amplitude bei $t = 0$ liefert für $x(t = 0) = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 0 = \frac{F_0}{k} + B \Rightarrow B = -\frac{F_0}{k} \\ &\Rightarrow \quad x(t) = \frac{F_0}{k}\left(1 - e^{i\omega t}\right) \; . \end{aligned} \tag{338}$$

Stetigkeit von x und $\dot{x}$ bei $t = T$ ausgenutzt:

$$\begin{aligned} &c_1 e^{i\omega T} - c_2 e^{-i\omega T} = -\frac{F_0}{k} e^{i\omega T} \\ &\frac{F_0}{k}\left(1 - e^{i\omega T}\right) = c_1 e^{i\omega T} + c_2 e^{-i\omega T} \end{aligned} \tag{339}$$

Lösbar für c_1, c_2:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{F_0}{2k}\left(e^{-i\omega T} - 2\right) \; ; \quad c_2 = \frac{F_0}{2k}\left(e^{i\omega T}\right) \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{F_0}{2k}\left(e^{i\omega(t-T)} + e^{-i\omega(t-T)} - 2e^{i\omega T}\right) \end{aligned} \tag{340}$$

Damit ist die Lösung der inhomogenen Gleichung in allen drei Zeitintervallen bekannt. Wieder ist nur der Realteil physikalisch relevant.