(P7) (a) Zur Erinnerung: Im Indexkalkül wird immer über doppelt auftretende Indizes summiert! Wie man diese benennt, ist es egal! Feste Indizes, über die nicht summiert wird, müssen beim Auswerten von vektoriellen Ausdrücken unverändert bleiben!

Beispiel: $(\vec{a}\times\vec{b})_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k \left(= \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k\right)$

feste Index, der die i-te Komponente des vekt. Ausdrucks wiedergibt

Im obigen Beispiel wird über die Indizes j und k summiert; nicht jedoch über i, der die i-te Komponente angibt (also $i=1,2,3$). Die Summationsindizes j und k kann man beliebig wählen:

$$(\vec{a}\times\vec{b})_i = \underline{\varepsilon_{ijk}\, a_j b_k} = \underline{\varepsilon_{ilm}\, a_l b_m},$$

denn es ist z.B. für die 1-Komponente ($i=1$):

$$\underline{\varepsilon_{1jk}\, a_j b_k} = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{1jk}\, a_j b_k = \underbrace{\varepsilon_{123}}_{=1} a_2 b_3 + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{=-1} a_3 b_2 =$$

$$= a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$\underline{\varepsilon_{1lm}\, a_l b_m} = \sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{1lm}\, a_l b_m = \varepsilon_{123}\, a_2 b_3 + \varepsilon_{132}\, a_3 b_2 =$$

$$= a_2 b_3 - a_3 b_2 \quad ✓$$

Dabei wurde die Definition des Levi-Civita-Tensors ε_{ijk} verwendet.

P7-2

Betrachten wir nun einen etwas komplizierten Ausdruck:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$$

denn wir im Indexkalkül auswerten möchten. Dies ist ein Vektor, also seine i-te Komponente lautet:

$$\left[(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})\right]_i = \text{(Anwenden von } (\vec{A}\times\vec{B})_i = \varepsilon_{ijk}A_jB_k \text{ mit } A_j \equiv (\vec{a}\times\vec{b})_j \text{ und } B_k \equiv (\vec{c}\times\vec{d})_k\text{)}$$

$$= \varepsilon_{ijk}(\vec{a}\times\vec{b})_j(\vec{c}\times\vec{d})_k = (*)$$

Als nächster Schritt muß man die beiden Kreuzprodukte $(\vec{a}\times\vec{b})_j$ und $(\vec{c}\times\vec{d})_k$ im Indexkalkül ausdrücken:

$$(*) = \underbrace{\varepsilon_{ijk}\,\underbrace{\varepsilon_{jlm}\,a_l b_m}_{(\vec{a}\times\vec{b})_j}\,\underbrace{\varepsilon_{ksn}\,c_s d_n}_{(\vec{c}\times\vec{d})_k}}_{\left[(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})\right]_i}. \qquad (1)$$

i-te Komponente des Kreuzproduktes $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$; dieser Index muß bei der Auswertung fest bleiben! Über alle anderen doppelt-auftretenden Indizes wird summiert!

Ausführlich geschrieben also:

$$(*) = \sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\sum_{lm}\varepsilon_{jlm}\,a_l b_m \sum_{s,n}\varepsilon_{ksn}\,c_s d_n \qquad (2)$$

P7-3

Betrachten wir den Ausdruck (2) etwas genauer:

$$\sum_{j,k}{}' \varepsilon_{ijk} \underbrace{\sum_{l,m}{}' \varepsilon_{jlm} a_l b_m}_{} \underbrace{\sum_{s,n} \varepsilon_{ksn} c_s d_n}_{} \qquad (3)$$

Def. des Kreuzproduktes $(\vec{a}\times\vec{b})_j$; Indizes l,m frei wählbar

Definition des Kreuzproduktes $(\vec{c}\times\vec{d})_k$; Indizes s,n frei wählbar

Anwendung der Def. des Kreuzproduktes auf die Vektoren $(\vec{a}\times\vec{b})_j$, $(\vec{c}\times\vec{d})_k$; Indizes j und k frei wählbar.

Ausdruck (3) könnte man also auch wie folgt schreiben:

$$\sum_{lm}{}' \varepsilon_{ilm} \sum_{kn} \varepsilon_{lkn} a_k b_n \sum_{js}{}' \varepsilon_m c_j d_s \qquad (4),$$

es ändert sich nichts!

<u>Beachte</u>: Bei Ausdrücken mit mehr als einer Summe muß man für die doppelt auftretenden Indizes, die zu verschiedenen Summen gehören, entsprechend unterschiedliche Buchstaben wählen!!

Beispiel: $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})_j = \underbrace{a_i b_i}_{(\vec{a}\cdot\vec{b})} \underbrace{\varepsilon_{jlm} a_l b_m}_{(\vec{a}\times\vec{b})_j}$; hier der Index j ist fest, er gibt die j-te Komponente des vektoriellen Ausdrucks $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$ wieder; über alle anderen doppelt auftretenden Indizes wird summiert.

P7-4

Ausdrücke der folgenden Art

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})_i = a_i b_i \varepsilon_{ijk} c_j d_k \quad \text{oder}$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})_j = a_j b_j \varepsilon_{jll} c_l d_l \quad \text{oder}$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})_k = a_l b_l \varepsilon_{klm} c_l d_l \quad \text{usw}$$

sind <u>nicht</u> zulässig!

Hingegen folgende Ausdrucksweisen des vektoriellen Ausdrucks $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})$ sind zulässig:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})_{i} = \overbrace{a_j b_j}^{\text{Skalar-Produkt } (\vec{a}\cdot\vec{b})} \underbrace{\varepsilon_{ikm} c_k d_m}_{\text{Kreuzprodukt } (\vec{c}\times\vec{d})_i} \quad , \text{für } i = 1,2,3$$

fester Index

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})_{k} = \overbrace{a_l b_l}^{\text{Skalar-Produkt } \vec{a}\cdot\vec{b}} \underbrace{\varepsilon_{kij} c_i d_j}_{\text{Kreuzprod. } (\vec{c}\times\vec{d})_k} \quad , \text{für } k = 1,2,3$$

fester Index

usw.

$\boxed{P7-5}$

Lösung von P7(a):

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = (\vec{a}\times\vec{b})_i(\vec{a}\times\vec{b})_i$$

Anwendung der Def. des Skalarproduktes auf den Vektor $(\vec{a}\times\vec{b})_i$ mit sich selbst, also über den Index i wird summiert!

$$= \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k\, \varepsilon_{ilm}\, a_l b_m$$

Zweimalige Anwendung des Vektorproduktes auf den Vektor $(\vec{a}\times\vec{b})_i$; über j,k und l,m wird summiert!

$$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}\, a_j b_k a_l b_m$$

$$= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{lk})\, a_j b_k a_l b_m$$

Anwendung der Relation $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{lk}$

(5) $$= a_l b_m a_l b_m - a_m b_l a_l b_m$$

Auswertung der Kronecker-Symbole; zur Erinnerung: im allgemeinen ist: $\delta_{\alpha\beta} = 1$, falls $\alpha = \beta$, sonst Null! Im speziellen Beispiel also: $\delta_{jl}\delta_{km}\, a_j b_k a_l b_m = a_l b_m a_l b_m$, usw.

$$= (a_l a_l)(b_m b_m) - (a_m b_m)(a_l b_l)$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$= a^2 b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \quad \checkmark$$

Bemerkung: Die Auswertung der δ-Symbole (Schritt (5)) könnte man auch anders durchführen; z.B.: $\delta_{jl}\delta_{km}\, a_j b_k a_l b_m = a_j b_k a_j b_k$; Ergebnis ist das gleiche!

P7 - 6

(b) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1+e^{x^2}}\right)$; $f'(x) \equiv \frac{df}{dx} = ?$

Zur Erinnerung: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Kettenregel (allg.): $f(x) \equiv u(v(x))$

$\curvearrowright \quad f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Hier speziell: $v(x) \equiv \frac{1}{1+e^{x^2}}$; $u(v(x)) = \ln v(x)$

Also:

$$f'(x) = (\ln' v(x)) \cdot v'(x) = \frac{1}{v(x)} \cdot v'(x)$$

Ferner ist:

$$v'(x) = \frac{0 \cdot (1+e^{x^2}) - 1 \cdot (1+e^{x^2})'}{(1+e^{x^2})^2} = \frac{-2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2}$$

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$(1+e^{x^2})' = 0 + 2xe^{x^2}$

Also: $$f'(x) = \frac{-2xe^{x^2}}{(1+e^{x^2})^2}$$

$g(x) = \sinh\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$; $g'(x) = ?$

Zur Erinnerung: $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$\boxed{P7-7}$

Also: $g'(x) = \sinh\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \cosh\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' =$

Kettenregel

$= \cosh\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{(1+x)'(1-x) - (1+x)(1-x)'}{(1-x)^2} =$

Quotientenregel

$= \cosh\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} =$

$(1 \pm x)' = \pm 1$

$= \cosh\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{2}{(1-x)^2}$

Also: $g'(x) = \cosh\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \frac{2}{(1-x)^2}$

P8-1

$$\vec{a}(u) = \vec{e}_x - u\vec{e}_x + u^2\vec{e}_y + u\vec{e}_z - u^2\vec{e}_z$$
$$= \left(1-u,\ u^2,\ u(1-u)\right)$$

$$\vec{b}(u) = u^3\vec{e}_x - \vec{e}_y + 2u^2\vec{e}_z - \vec{e}_z$$
$$= \left(u^3,\ -1,\ 2u^2-1\right)$$

(i) $\frac{d}{du}(\vec{a}\cdot\vec{b})$:

(Direkt) $$\vec{a}\cdot\vec{b} = (1-u)u^3 + u^2(-1) + \overbrace{u(1-u)}^{u-u^2}(2u^2-1)$$
$$= u^3 - u^4 - \cancel{u^2} + 2u^3 - 2u^4 - u + \cancel{u^2}$$
$$= -3u^4 + 3u^3 - u$$

$$\frac{d}{du}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{d}{du}\left(-3u^4+3u^3-u\right) = -12u^3+9u^2-1 \ ✓$$

(Über die Rechenregel der Differentiation)

$$\frac{d}{du}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \left(\frac{d}{du}\vec{a}\right)\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d}{du}\vec{b}$$

$$\frac{d}{du}\vec{a} = \left(-1,\ 2u,\ 1-2u\right)$$

$$\frac{d}{du}\vec{b} = \left(3u^2,\ 0,\ 4u\right)$$

$$= -u^3 - 2u + (1-2u)(2u^2-1) + (1-u)3u^2 + (u-u^2)4u =$$

$$= -u^3 - \cancel{2u} + 2u^2 - 4u^3 - 1 + \cancel{2u} + 3u^2 - 3u^3 + 4u^2 - 4u^3$$
$$= -12u^3 + 9u^2 - 1 \ ✓$$

P8-2

(ii) $\frac{d}{du}(\vec{a}\times\vec{b})$:

(Direkt) $(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{pmatrix} u^2(2u^2-1) - (u-u^2)(-1) \\ (u-u^2)u^3 - (1-u)(2u^2-1) \\ u-1 - u^5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to yz-zy \\ \to zx-xz \\ \to xy-yx \end{array}$

$\to (\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{pmatrix} 2u^4 - 2u^2 + u \\ -u^5+u^4+2u^3-2u^2+u-1 \\ -u^5+u-1 \end{pmatrix}$

$\to$

$\frac{d}{du}(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{pmatrix} 8u^3-4u+1 \\ -5u^4+4u^3+6u^2-4u-1 \\ -5u^4+1 \end{pmatrix}$

(Über die Rechenregel)

$\frac{d}{du}(\vec{a}\times\vec{b}) = \left(\frac{d}{du}\vec{a}\right)\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d}{du}\vec{b}$

$\left(\frac{d}{du}\vec{a}\right)\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 2u(2u^2-1) - (1-2u)(-1) \\ (1-2u)u^3 - (-1)(2u^2-1) \\ (-1)(-1) - 2u\cdot u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u^3-4u+1 \\ -2u^4+u^3+2u^2-1 \\ -2u^4+1 \end{pmatrix}$

$\vec{a}\times\frac{d}{du}\vec{b} = \begin{pmatrix} u^2\cdot 4u - (u-u^2)\cdot 0 \\ (u-u^2)3u^2 - (1-u)\cdot 4u \\ (1-u)\cdot 0 - u^2\cdot 3u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4u^3 \\ -3u^4+3u^3+4u^2-4u \\ -3u^4 \end{pmatrix}$

$$\boxed{F8-3}$$

$$\frac{d}{du}(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{pmatrix} 8u^3 - 4u + 1 \\ -5u^4 + 4u^3 + 6u^2 - 4u - 1 \\ -5u^4 + 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{PA-1}$

(a) $f(r)$ sei ~~ein~~ skalares Feld, das nur vom Betrag des Ortsvektors abhängt: $f(\vec{r}) \equiv f(r)$

$$\vec{\nabla} f(r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(r) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(r) \\ \frac{\partial}{\partial z} f(r) \end{pmatrix}$$; wir benutzen die formale Schreibweise:

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} ; \quad i = 1, 2, 3$$

$\equiv \frac{\partial}{\partial x}$ $\frac{\partial}{\partial y}$ $\frac{\partial}{\partial z}$

$$\Rightarrow \partial_i f(r) \underset{\text{(Kettenregel)}}{=} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{\text{Betrag von } \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j x_j^2 \right)^{1/2} =$$

Ableitung nach der i-ten Komponente

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ + Kettenregel für $\sqrt{f(x)}$

$$= \frac{\partial_i x_j^2}{2\underbrace{\left(\sum_j x_j^2\right)^{1/2}}_{r}} = \frac{\cancel{2} x_j \partial_i x_j}{\cancel{2} r} = \frac{x_j \delta_{ij}}{r} = \frac{x_i}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial f(r)}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r}$$

$\boxed{P9-2}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi_1(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\phi_1(x,y,\cancel{z}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(a_x x + a_y y + a_z z\right) = a_x + 0 + 0$$

Ableitung nach der Variable x bei festgehaltenen übrigen Komponenten

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{\frac{\partial}{\partial x}\phi_1(\vec{r}) = a_x}}$$

allg. also: $\partial_i \phi_1(\vec{r}) = a_i$,

// Formaler Beweis: $\underline{\underline{\partial_i \phi_1(\vec{r})}} = \partial_i(\vec{a}\cdot\vec{r}) = \partial_i(a_j r_j) = a_j \partial_i r_j =$

Indexkalkül! $\vec{a}=$const.

$$= a_j \delta_{ij} = \underline{\underline{a_i}} \checkmark$$ //

part. Ableitung $\partial_i \phi_2(\vec{r})$

$$\underline{\underline{\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-a_x)^2+(y-a_y)^2+(z-a_z)^2}} =$$

$$= -\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}(x-a_x)\cdot 1}{\sqrt{\ldots}^{3}} = \underline{\underline{-\frac{x-a_x}{|\vec{r}-\vec{a}|^3}}}$$

Analog: $\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} = -\frac{y-a_y}{|\vec{r}-\vec{a}|^3}$; $\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|} = -\frac{z-a_z}{|\vec{r}-\vec{a}|^3}$

P9-3

(b) Zeige: Die Rotation eines Gradientenfeldes ist immer gleich 0

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\Longrightarrow \left[\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\phi)\right]_i = \left[\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi)\right]_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j\, (\partial_k \phi)$$

Ableitungen vertauschen!

$$= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_k \partial_j \phi$$

$$= \sum_{jk} -\varepsilon_{ikj}\, \partial_k \partial_j \phi$$

Umbenennung $j \leftrightarrow k$

$$= -\sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \partial_k \phi$$

$$= -\left[\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\phi)\right]_i$$

$$\Longrightarrow \left[\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\phi)\right]_i = 0 \quad \forall i = 1,2,3$$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) = \vec{0}$$

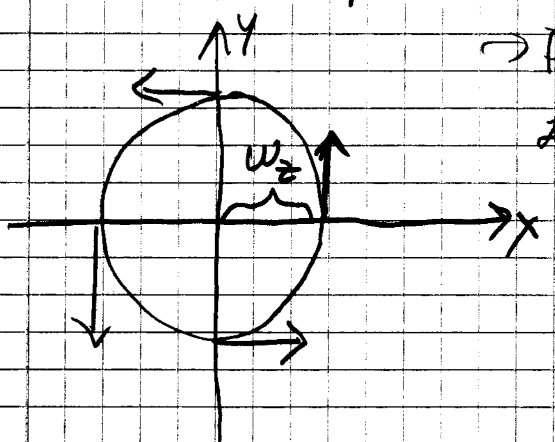
P10-1

(a) $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{r}(\vec{\omega}\times\vec{r})$; $\vec{\omega} = \omega_z \vec{e}_z$; $\omega_z = \text{const.}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\omega_z}{r}(-y, x, 0) \quad \text{mit } \vec{\omega} = (0,0,\omega_z)$$
$$\vec{r} = (x, y, z)$$

In der $z=0$-Ebene gilt $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow |\vec{A}(\vec{r})| = \frac{\omega_z}{r} r = \omega_z$



$\rightarrow$ Feldlinien stellen Pfeile konst. Länge ω_z dar, die senkrecht zu $\vec{r}$ und zu $\vec{e}_z$ (wegen dem Kreuzprodukt!) orientiert sind.

(b) Partielle Ableitungen: Wir hatten (siehe P9) $\partial_i \frac{1}{r} = -\frac{r_i}{r^3}$

$\Rightarrow$ mit $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\omega_z}{r}(-y, x, 0)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\omega_z}{r^3}(xy, r^2-x^2, 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{r}\right) = -y\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -y\frac{(-x)}{r^3} = \frac{xy}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\cdot\frac{1}{r}\right) \underset{\text{Produktregel}}{=} 1\cdot\frac{1}{r} + x\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = \frac{1}{r} - x\frac{x}{r^3} = \frac{r^2-x^2}{r^3}$$

Analog:

$$\frac{\partial}{\partial y}\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\omega_z}{r^3}(y^2-r^2, -xy, 0), \quad \frac{\partial}{\partial z}\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\omega_z}{r^3}(yz, -xz, 0)$$

$\boxed{P10-2}$

$$\underline{\underline{\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r})}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \sum_j \frac{\partial A_j(\vec{r})}{\partial x_j}$$

$$\left.\frac{\partial A_x}{\partial x} = \frac{w_z}{r^3}xy\,;\ \frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{w_z}{r^3}(-xy)\,;\ \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0\right\} =$$

$$= \frac{w_z}{r^3}\left(xy - xy\right) = \underline{\underline{0}}$$

$$\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}) =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{w_z}{r^3}\left(xz,\ yz,\ r^2 + z^2\right)$$

durch Einsetzen der partiellen Ableitungen (siehe $\boxed{P10-1}$)