H4 -1

(a) Es gilt: $x = t$, $y = at^2 \to y = ax^2 \equiv$ Parabel

(b) $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[(t, at^2, 0)] = (1, 2at, 0)$

$\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}[(t, at^2, 0)] = (0, 2a, 0)$

(c) $\alpha)$ $\vec{e}_T = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|}$; $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{1+4a^2t^2} \to$

$\vec{e}_T = \frac{(1, 2at, 0)}{\sqrt{1+4a^2t^2}}$

$\beta)$ Es gilt: $\frac{d\vec{e}_T}{ds} = \varkappa \vec{e}_N$; $\frac{d\vec{e}_T}{ds} = \frac{\frac{d\vec{e}_T}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$;

$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\sqrt{1+4a^2t^2}}(1, 2at, 0)\right] = \frac{2a}{(1+4a^2t^2)^{3/2}}(-2at, 1, 0)$

$\to \frac{d\vec{e}_T}{ds} = \frac{2a}{(1+4a^2t^2)^2}(-2at, 1, 0)$ (1)

Es gilt: $\varkappa = \left|\frac{d\vec{e}_T}{ds}\right| = \frac{2a}{(1+4a^2t^2)^2}(1+4a^2t^2)^{1/2}$

$\to \varkappa = \frac{2a}{(1+4a^2t^2)^{3/2}}$ (2)

$$\rightarrow \vec{e}_N = \frac{1}{\varkappa}\frac{d\vec{e}_T}{ds} \overset{(1),(2)}{=} \frac{(1+4a^2t^2)^{3/2}}{2a}\frac{2a}{(1+4a^2t^2)^2}(-2at,1,0)$$

$$\vec{e}_N = \frac{1}{(1+4a^2t^2)^{1/2}}(-2at,1,0)$$

γ) $\vec{e}_B = \vec{e}_T \times \vec{e}_N = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 2at & 0 \\ -2at & 1 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{1+4a^2t^2} = \vec{e}_z = (0,0,1)$

δ) Da $\frac{d\vec{e}_B}{ds} = 0 \rightarrow \tau = 0$

(d) Es gilt: $\ddot{\vec{r}} = a_T\vec{e}_T + a_N\vec{e}_N \rightarrow a_T = \ddot{\vec{r}}\cdot\vec{e}_T$, da $\vec{e}_T \perp \vec{e}_N$ ist.

Also: $a_T = \frac{1}{(1+4a^2t^2)^{1/2}}(1,2at,0)\cdot(0,2a,0) = \frac{4a^2t}{\sqrt{1+4a^2t^2}}$

Ebenso: $a_N = \ddot{\vec{r}}\cdot\vec{e}_N = \frac{1}{(1+4a^2t^2)^{1/2}}(-2at,1,0)\cdot(0,2a,0)$

$$a_N = \frac{2a}{\sqrt{1+4a^2t^2}}$$

H5

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ mit $x(t) = A\cdot\cos(\omega_1 t + \alpha_1)$ (1)
und $y(t) = B\cdot\cos(\omega_2 t + \alpha_2)$

(a) $\underline{\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \underline{(-A\cdot\omega_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1), -B\,\omega_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2))}$ (2)

$\underline{\ddot{\vec{r}}(t)} = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = \underline{-(A\omega_1^2 \cos(\omega_1 t + \alpha_1), B\omega_2^2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2))}$

(b) Die Teilchenbewegung beginne bei $t=0$.
Es soll eine <u>geschlossene Bahn</u> durchlaufen werden,
d.h. $\underline{\vec{r}(t=0) = \vec{r}(t=t_0)}$ und $\underline{\vec{v}(t=0) = \vec{v}(t=t_0)}$. (3)
Hierbei ist t_0 die Zeit für einen Umlauf.
(1) und (2) in (3) ergibt:

$$\cos\alpha_1 = \cos(\omega_1 t_0 + \alpha_1), \cos\alpha_2 = \cos(\omega_2 t_0 + \alpha_2),$$

sowie

$$\sin\alpha_1 = \sin(\omega_1 t_0 + \alpha_1), \sin\alpha_2 = \sin(\omega_2 t_0 + \alpha_2)$$

$\rightarrow$ $\omega_1 t_0 = 2\pi n$, $\omega_2 t_0 = 2\pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow$ $\underline{t_0 = \frac{2\pi n}{\omega_1} = \frac{2\pi m}{\omega_2}}$ ist die gesuchte Umlaufzeit

$\rightarrow$ $\underline{\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m}{n}}$ als Bedingung für geschlossene Bahnkurven