Hinweise:
- jede Aufgabe auf ein extra Blatt mit Namen
- Dauer 3 Stunden, ohne Hilfsmittel

1 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1, -2, 3)$ und $\vec{b} = (-4, 5, 7)$. Berechnen Sie

(a) die Länge der Vektoren.
(b) ihr Skalarprodukt und den eingeschlossenen Winkel.
(c) das Kreuzprodukt.
(d) die Projektion von $\vec{a} + \vec{b}$ auf die $\vec{a}$-Achse.

4

2 Berechnen Sie mit den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus Aufgabe 1 sowie $\vec{c} = (6, -4, 2)$

(a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
(b) $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
(c) $(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$

3

3 Zerlegen Sie einen gegebenen Vektor, $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$, wobei $\vec{r}_1$ parallel und $\vec{r}_2$ senkrecht zu einem zweiten Vektor $\vec{p}$ sein soll. 3

4 Vereinfachen Sie: $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot ((\vec{a} + \vec{c}) \times \vec{b})$. 2

5 Zeigen Sie: $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$. 2

6 Berechnen Sie den Normalen-Einheitsvektor am Punkt (1,1,1) auf der Fläche $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 11$. Was ist das für eine Fläche? 3

7 Bilden Sie die partielle Ableitungen nach y von $\phi = xy^2z^3$ sowie von $\phi\vec{A}$ mit $\vec{A} = (x, y, z)$ (a) direkt und (b) mittels der Produktregel. 3

8 Geben Sie den Vektor in Richtung der stärksten Änderung der Funktion

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3$$

an den Punkten $(1, 1, 1)$ und $(0, 0, 0)$ an. Interpretieren Sie das letzte Ergebnis. 3

9 Bestimmen Sie $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$ mit $\vec{A} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. 3

10 Berechnen Sie das Linienintegral

$$\int d\vec{r} \cdot \vec{F} \quad \text{mit} \;\; \vec{F} = (y, z, x)$$

für die Wege

- $(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,1,0) \to (1,1,1)$
- $(0,0,0) \to (0,0,1) \to (0,1,1) \to (1,1,1)$

Vergleichen Sie beide Resultate und machen Sie sich (und uns) das Ergebnis des Vergleichs plausibel. 6