9 Übungen zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, den 12.1.2010

9.1

$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{x-2+x-1}{(x-1)(x-2)}$

$\Rightarrow 0 = 2x_0 - 3 \Rightarrow x_0 = 1,5$ (Damit hat f(x) nur eine Nullstelle)

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{von links} \\ +\infty & \text{von rechts} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{von links} \\ +\infty & \text{von rechts} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +0$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -0$$

$y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ mit $x \in (-\infty, 1)$ ist monoton fallend, da $\forall a, b \in (-\infty, 1) : a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

$y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ mit $x \in (1, 2)$ ist monoton fallend, da $\forall a, b \in (1, 2) : a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

$y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ mit $x \in (2, \infty)$ ist monoton fallend, da $\forall a, b \in (2, -\infty) : a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

Nach Zwischenwertsatz nimmt eine stetige Funktion $g(x)$ in einem abgeschlossenen Interval $[a, b]$ jeden Wert zwischen $g(a)$ und $g(b)$ an. Die hier gegebene Funktion f(x) ist stetig in den Intervallen $(-\infty, 1),\ (1, 2),\ (2, \infty)$ und jeweils monoton fallend in den einzelnen Intervallen. Darum nimmt Sie alle Zahlen zwischen den gerade ausgerechneten Grenzwerten wiefolgt an (Zwischenwertsatz): einmal reelle Zahlen x_1 mit $x_1 > 0$, einmal alle möglichen reellen Zahlen x_2 und einmal alle reellen Zahlen x_3 mit $x_3 < 0$.

Da die Beschränkung von x_1 und x_3 dem Raum $\mathbb{R}/\{0\}$ und die Beschränkung von x_2 dem Raum $\mathbb{R}$ entsprechen, nimmt die Funktion alle Zahlen größer Null und alle Zahlen kleiner Null zweimal und Null selber einmal an.

9.2

$x = exp(-\lambda x) \Rightarrow 0 = x - exp(-\lambda x)$

$f_\lambda(x) := x - exp(-\lambda x)$

$$f_\lambda(1) = 1 - exp(-\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für kleine } \lambda \\ 1 & \text{für große } \lambda \end{cases}$$

$f_\lambda(0) = -1$

Also gilt nach dem Zwischenwertsatz, dass die Funktion $f_\lambda(x)$ jeden Wert zwischen -1 und $1 - exp(-\lambda)$ annehmen muss. Für $1 - exp(-\lambda)$ gilt, dass der Wert in jedem Fall im Intervall $(0, 1)$ liegt, also $0 < y < 1$. Dementsprechend hat die Funktion mindestens eine Nullstelle, da sie stetig ist und einen Wert größer und einen Wert kleiner Null annimmt. Da sie außerdem monoton ist, gibt es nur eine Nullstelle. Somit hat die Gleichung $0 = x - exp(-\lambda x) \Rightarrow x = exp(-\lambda x)$ exakt eine Lösung.

9.3

a) Die Funktion ist *stetig*, da $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall a, b \in [0, 1], |a - b| < \delta : |f(a) - f(b)| < \varepsilon$.

Jede stetige Funktion, die durch ein kompaktes Intervall beschränkt ist, ist *gleichmäßig stetig.*

b) Die Funktion ist *stetig*, da $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ \forall a, b \in [0, \infty), |a - b| < \delta : |f(a) - f(b)| < \varepsilon$.

Die Funktion ist *gleichmäßig stetig*, da die Differenz zweier Funktionswerte, deren Funktionsargumente δ voneinander entfernt sind, für steigende Funktionsargumente immer kleiner wird. Dadurch ist ein Epsilon bestimmbar, das immer größer als diese Differenz ist,

c) Die Funktion ist *stetig*, da x^2 die Amplitude darstellt und die eigentlich in 0 unstetige Funktion $sin(\frac{1}{x})$ auch in 0 stetig macht.

Da die Funktion stetig und in einem geschlossenen Intervall ist, ist sie *gleichmäßig stetig*.

9.4

a) $det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 3) - 0 \cdot (2 \cdot 1 + 4 \cdot 3) - 1 \cdot (2 \cdot 0 + 4 \cdot 3) = -3$

b) Gesucht ist eine 3×3 Matrix mit stetigen Funktionen abhängig von t als Elemente:

$$M(t) := \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & f_{13}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & f_{23}(t) \\ f_{31}(t) & f_{32}(t) & f_{33}(t) \end{pmatrix} \text{ mit } f_{ij}(t) \text{ stetig.}$$

Die Determinante von $M(t)$ könnte so berechnet werden: $det(M(t)) = f_{11}(t) \cdot (f_{22}(t) \cdot f_{33}(t) - f_{32}(t) \cdot f_{23}(t)) - f_{12}(t) \cdot (f_{21}(t) \cdot f_{33}(t) - f_{31}(t) \cdot f_{23}(t)) + f_{13}(t) \cdot (f_{21}(t) \cdot f_{32}(t) - f_{31}(t) \cdot f_{22}(t))$.

Da die Determinante $det(M(t))$ somit ausschließlich aus stetigen Funktionen zusammengesetzt wurde, ist sie auch stetig. Somit ist der Zwischenwertsatz anwendbar.

Da nach (ii) $M(0) = I$ und $M(1) = A$, ist $det(M(0)) = 1$ und $det(M(1)) = -3$ gemäß Teilaufgabe a). Nach dem Zwischenwertsatz muss es jedoch auch ein t_0 geben, für das gilt: $det(M(t_0)) = 0$. Da eine Matrix dessen Determinante Null ist jedoch nicht invertiert werden kann, verstößt eine solche Matrix zwangsläufig gegen (i).

Folglich gibt es keine stetigen Funktionen, die diese Eigenschaften erfüllen.

9.5

Nach 6.2 ist $det((a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \left(sign(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i} \right)$.

Es wird also über alle Permutationen der Zahlen $\{1, ..., n\}$ summiert, wobei das i-te Element der jeweiligen Permutation als Zeilenindex für die i-te Spalte der zu determinierenden Matrix benutzt wird, um die so bezeichneten Elemente derselben miteinander und mit dem Signum der Permutation zu multiplizieren, und das Ergebnis anschließend über das Summenzeichen in der selben Weise mit den anderen Permutationen summiert wird. Dabei entspricht Signum $(-1)^t$ mit t:Anzahl der Transpositionen, die nötig waren, um die Permutation aus der Ursprungsreihenfolge $1, 2, 3...$ zu bilden.

Da hier alle Permutationen betroffen sind, existiert, wenn es die Permutation

$(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_{k-1}, a_k, a_{k-1}, ..., a_n)$ gibt, auch die Permutation

$(a_1, ..., a_{i-1}, a_k, a_{i+1}, ..., a_{k-1}, a_i, a_{k-1}, ..., a_n)$. Zur Berechnung der Determinante wird nun das z-te Element der Permutation als Zeilenindex zu dem z-ten Spaltenindex der Matrix gefordert, um die jeweiligen Elemente miteinander zu multiplizieren. Sind nun aber 2 Spalten identisch, wird in der Summe durch die eben beschriebene Eigenschaft zu jedem zweiten Summand ein vom Betrag her identischer Summand addiert (je zwei Summanden sind vom Betrag her gleich). Dieser gleiche Summand besitzt jedoch zwangläufig ein anderes Vorzeichen (durch Signum-Funktion), da in obiger Eigenschaft gezeigt wurde, dass sich dieser Summand mithilfe genau einer weiteren Transposition erstellen lässt.

Somit heben sich bei der Summe je zwei Summanden auf. Da die Anzahl der Permutationen von $n > 1$ Zahlen stehts durch 2 teilbar ist, ergibt sich als Determinante einer Matrix mit 2 identischen Spaltenvektoren immer der Wert 0.

Weiterhin gilt, dass, sofern $(a_1, ..., a_n)$ linear abhängig ist, es möglich ist, durch Spaltenumformungen die Elemente einer Spalte k zu 0 zu transformieren. Da so in jedem Summanden der Determinante ein Faktor 0 enthalten ist, ist der Summand ebenfalls 0 und die durch die Spaltenumformungen entstandenen Faktoren entfallen. Somit ist die Determinante einer Matrix mit linear abhängigen Spaltenvektoren immer 0.

9.6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

9.7

a) $s_{k+1} = \frac{k \cdot s_k + 1 \cdot \mu_{k+1}}{k+1} = \frac{k \cdot s_k + 1 s_k + r}{k+1} = \frac{s_k \cdot (k+1) + r}{k+1} = s_k + \frac{r}{k+1} = r + \sum_{i=2}^{k} \left(\frac{r}{i+1} \right)$

$\mu_{k+1} = s_k + r = 2r + \sum_{i=2}^{k-1} \left(\frac{r}{i+1} \right)$

$u_k = \mu_{k+1} - \mu_k = 2r + \sum_{i=2}^{k-1} \left(\frac{r}{i+1} \right) - 2r - \sum_{i=2}^{k-2} \left(\frac{r}{i+1} \right) = \frac{r}{k}$

Gesamtüberhang: $\sum_{i=1}^{k} u_i = r \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{i} \right)$

$\sum \frac{1}{i}$ ist divergent, daher ist ein unendlich langer Gesamtüberhang möglich.

b) $\sum_{i=1}^{2^j-1} \frac{r}{k} = \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{k=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{r}{k} = \sum_{l=0}^{6-1} \sum_{k=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{r}{k} + \sum_{l=6}^{j-1} \sum_{k=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{r}{k} = 5,2 + \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{k=2^l}^{2^{l+1}-1} \frac{r}{k}$

$\approx 5,2 + \sum_{l=0}^{j-1} 0,76 = 5,2 + 0,76l$

$\Rightarrow 15 \leq 5,2 + (l-6) \cdot 0,76 \Rightarrow l \geq 18,89$

$\Rightarrow$ Anzahl der benötigen Münzen mindestens ungefähr $2^l = 2^{18,89} = 485799$

$\Rightarrow$ Preis = 485799 Euro.