Hausaufgabe in MMP zum 30.11.09

Nr. 20

a) $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^5} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + z^2}^5} \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}^5} \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$ (Zyl. Koord.)

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{r^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\vartheta}^5} \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{r^2\sin^2\vartheta(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) + r^2\cos^2\vartheta}^5} \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{r^2(\sin^2\vartheta+\cos^2\vartheta)}^5} \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{r^5} \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$ (Kugelkoord.)

b) kart. Koord.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \left(\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \frac{d}{dx_3}\right) \cdot (a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^{3} \frac{da_i}{dx_i}$

$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \left(\frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \frac{d}{dx_3}\right) \times (a_1, a_2, a_3) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{da_j}{dx_i} e_k$

Kugel-Koord.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \left(\frac{d}{dr}, \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{d\vartheta}, \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{d}{d\varphi}\right) \cdot (a_r, a_\vartheta, a_\varphi)$

$= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 a_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}(\sin\vartheta\, a_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{d}{d\varphi}A_\varphi$

$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \left(\frac{d}{dr}, \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{d\vartheta}, \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{d}{d\varphi}\right) \times (a_r, a_\vartheta, a_\varphi)$

$= \Big(\frac{1}{r\sin\vartheta} \cdot \frac{d}{d\vartheta}(A_\varphi \sin\vartheta) - \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{d}{d\varphi}a_\vartheta, \frac{1}{r\sin\vartheta} \cdot \frac{d}{d\varphi}a_r - \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}(rA_\varphi),$

$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA_\vartheta) - \frac{1}{r}\frac{d}{d\vartheta}a_r\Big)$.

c) $f(\vec{r}) = \vec{r}^2$

$\vec{\nabla} \cdot f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = \vec{\nabla} \cdot (x^2+y^2+z^2) = \left(\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{dx}, \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{dy}, \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{dz}\right)$

$= (2x, 2y, 2z)$

Vorbereitung zu MMP zum 30.11.2009

Nr. 21

$$\vec{\nabla}\times\vec{a} = \left(\frac{da_3}{dy_2} - \frac{da_2}{dy_3}\right)\vec{e_{y_1}} + \left(\frac{da_1}{dx_3} - \frac{da_3}{dy_1}\right)\vec{e_{y_2}} + \left(\frac{da_2}{dy_1} - \frac{da_1}{dy_2}\right)\vec{e_{y_3}}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e_{y_1}} & \vec{e_{y_2}} & \vec{e_{y_3}} \\ \frac{d}{dy_1} & \frac{d}{dy_2} & \frac{d}{dy_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

(mit $b_{y_i} = \left|\frac{d\vec{r}}{dy_i}\right|$, also $\vec{e_{y_i}} = b_{y_i}^{-1} \cdot \frac{d\vec{r}}{dy_i}$ folgt:)
[mithilfe der Determinantenumformungsregel)

$$= \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \cdot \begin{vmatrix} b_{y_1}\vec{e_1} & b_{y_2}\vec{e_2} & b_{y_3}\vec{e_3} \\ b_{y_1}\frac{d}{dy_1} & b_{y_2}\frac{d}{dy_2} & b_{y_3}\frac{d}{dy_3} \\ b_{y_1}a_1 & b_{y_2}a_2 & b_{y_3}a_3 \end{vmatrix}$$

(per Def. v. b_{y_i} folgt dass $b_{y_i} \cdot \frac{d}{dy_i} = \frac{d}{dy_i}$, also:)

$$= \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \begin{vmatrix} b_{y_1}\vec{e_1} & b_{y_2}\vec{e_2} & b_{y_3}\vec{e_3} \\ \frac{d}{dy_1} & \frac{d}{dy_2} & \frac{d}{dy_3} \\ b_{y_1}a_1 & b_{y_2}a_2 & b_{y_3}a_3 \end{vmatrix}$$