Übungen zur Mathematische Methoden der Physik
Armin Bunde, Wintersemester 2009/2010
Blatt 8

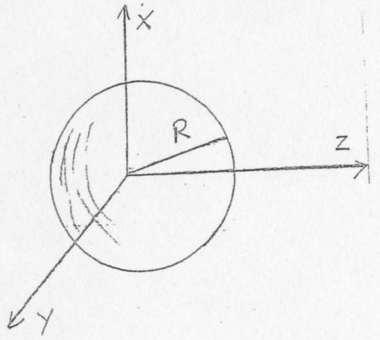
Übungsblatt zu den Übungen am 07.12.2009

Aufgabe 22:

a) Berechnen Sie die Masse einer Kugel mit Radius R und der Dichte $\varrho(x,y,z) = \varrho_0(x^2+z^2)$.

Tip zur Lösung des Integrals $\int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi$: Man integriere partiell und beachte, dass

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi(1-\sin^2\varphi) = x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi.$$



b) Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx$, indem Sie von $\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}dx\right]^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)}dxdy\right]$ ausgehen und Polarkoordinaten benutzen.

Aufgabe 23:

Gegeben sei eine Bahnkurve in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{r}(t) = (R\cos\omega t, R\sin\omega t, v_z t)$$

wobei R, ω und v_z konstant sind (Schraubenlinie). Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$, sowie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ der Bewegung in Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 24:

Ein Körper führe in x- bzw. y-Richtung voneinander unabhängige harmonische Schwingungen aus:

$$\vec{r}(t) = a_x\cos(\omega_x t + \varphi_x)\vec{e}_x + a_y\cos(\omega_y t + \varphi_y)\vec{e}_y.$$

1) Berechnen Sie $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$.

2) Unter welchen Bedinungen gibt es geschlossene Bahnkurven, d. h.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t+T)$$
$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t+T)?$$

3) Skizzieren Sie $\vec{r}(t)$ für folgende Fälle:

a) $\omega_x = \omega_y, \varphi_x = \varphi_y = 0$

b) $\omega_x = 2\omega_y, \varphi_x = 0, \varphi_y = 0.5$

c) $\omega_x = 5\omega_y, \varphi_x = \varphi_y = 0.$

Aufgabe 25:

Auf ein Teilchen wirke die konstante Beschleunigung $\ddot{\vec{r}} = -g\vec{e}_z$. Zum Zeitpunkt $t=0$ befinde es sich im Ursprung des Koordinatensystems und habe die Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = v_0\{\cos(\alpha), 0, \sin(\alpha)\}, v_0 > 0$.

1) Bestimmen Sie $x(t), z(t)$ und $z(x)$.

2) Berechnen Sie die Steigzeit t_s und die Steighöhe $z(t_s)$, bei der sich die Bewegungsrichtung umkehrt,

3) sowie die Flugzeit t_f und die Flugweite $x(t_f)$, bei der $z(t_f) = 0$ ist.

4) Zeigen Sie, dass die Bewegung in der x, z-Ebene verläuft.