1 MMP für 02.11.2009

1.1 Aufgabe 7

$$
\begin{aligned}
|\vec{r}(t)| &= \sqrt{sin(t)^2 + cos(t)^2 + 16t^2} = \sqrt{1+16t^2} \\
\vec{r'}(t) &= cos(t) \cdot \vec{e}_1 + 4 \cdot \vec{e}_2 - sin(t) \cdot \vec{e}_3 \\
|\vec{r'}(t)| &= \sqrt{cost(t)^2 + 16 + (-sin(t))^2} = \sqrt{17} \\
\vec{r''}(t) &= -sin(t) \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + (-cos(t)) \cdot \vec{e}_3 \\
|\vec{r''}(t)| &= \sqrt{(-cos(t))^2 + (-sin(t))^2} = \sqrt{1} = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\vec{r}(0,5)| &= \sqrt{5} \\
\vec{r'}(0,5) &= cos(0,5) \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 - sin(0,5) \cdot \vec{e}_3 \\
|\vec{r'}(0,5)| &= \sqrt{17} \\
\vec{r''}(0,5) &= -sin(0,5) \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 - cos(0,5) \cdot \vec{e}_3 \\
|\vec{r''}(0,5)| &= 1
\end{aligned}
$$

1.2 Aufgabe 8

$Z := \frac{1}{\sqrt{a^2+2ab+2b^2}}$

a)

$$
\begin{aligned}
&s(t) = \int_0^t dt'(|\vec{r'}(t')|) \\
&\vec{r'}(t) = b \cdot cos(t) \cdot \vec{e}_1 - (a+b) \cdot \vec{e}_2 + (b \cdot sin(t)) \cdot \vec{e}_3 \\
&|\vec{r'}(t)| = \sqrt{b^2cos^2(t) + (a+b)^2 + b^2sin^2(t)} = \sqrt{2b^2 + a^2 + 2ab} \\
&s(t) = \int_0^t dt'(|\vec{r'}(t')|) = t \cdot \sqrt{a^2 + 2ab + 2b^2}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\vec{e}_t(t) = \frac{\vec{r'}(t)}{s'(t)} = (b \cdot cos(t) \cdot \vec{e}_1 - (a+b) \cdot \vec{e}_2 + (b \cdot sin(t)) \cdot \vec{e}_3) \cdot Z \\
&t(s) = s(t)^{-1} = s \cdot Z \\
&\vec{e}_t(s) = \vec{e}_t(t) \circ t(s) = (b \cdot cos(s \cdot Z) \cdot \vec{e}_1 - (a+b) \cdot \vec{e}_2 + (b \cdot sin(s \cdot Z)) \cdot \vec{e}_3) \cdot Z
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_n(s) &= \frac{\vec{e'}_t(s)}{|\vec{e'}_t(s)|} \\
&= \frac{((b \cdot Z \cdot -sin(s \cdot Z)) \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + (b \cdot Z \cdot cos(s \cdot Z)) \cdot \vec{e}_3) \cdot Z}{\sqrt{b^2 \cdot Z^2 \cdot (-sin(s \cdot Z))^2 + b^2 \cdot Z^2 \cdot cos^2(s \cdot Z)} \cdot Z} \\
&= \frac{b \cdot Z \cdot ((-sin(s \cdot Z)) \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + (cos(s \cdot Z)) \cdot \vec{e}_3)}{\sqrt{(b^2 \cdot Z^2)}} \\
&= (-sin(s \cdot Z)) \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + (cos(s \cdot Z)) \cdot \vec{e}_3
\end{aligned}
$$

d)

$$\vec{e}_b(s) = \vec{e}_t(s) \times \vec{e}_n(s)$$
$$= \vec{e}_1 \cdot (-(a+b) \cdot (cos(s \cdot Z)) - 0) + \vec{e}_2 \cdot ((b \cdot sin(s \cdot Z)) \cdot (-sin(s \cdot Z))$$
$$- (b \cdot cos(s \cdot Z)) \cdot (cos(s \cdot Z))) + \vec{e}_3 \cdot (0 + (a+b) \cdot (-sin(s \cdot Z)))$$
$$= -\vec{e}_1 \cdot (a+b) \cdot (cos(s \cdot Z)) - \vec{e}_2 \cdot b - \vec{e}_3 \cdot (a+b) \cdot (sin(s \cdot Z))$$

e) Da $\vec{e}_b(s) = \vec{e}_t(s) \times \vec{e}_n(s)$, ist $\vec{e}_b(s)$ auf $\vec{e}_t(s)$ und $\vec{e}_n(s)$ senkrecht.

z.Z : $\vec{e}_t(s) \cdot \vec{e}_n(s) = 0$

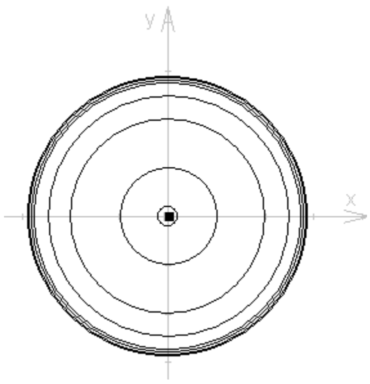
$$\vec{e}_t(s) \cdot \vec{e}_n(s) = (b \cdot cos(s \cdot Z) \cdot \vec{e}_1 - (a+b) \cdot \vec{e}_2 + (b \cdot sin(s \cdot Z)) \cdot \vec{e}_3)$$
$$\cdot Z \cdot ((-sin(s \cdot Z)) \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + (cos(s \cdot Z)) \cdot \vec{e}_3)$$
$$= ((b \cdot cos(s \cdot Z)) \cdot (-sin(s \cdot Z)) + (-(a+b)) \cdot 0 + (b \cdot sin(s \cdot Z)) \cdot (cos(s \cdot Z))) \cdot Z$$
$$= -b \cdot sin(s \cdot Z)cos(s \cdot Z) + b \cdot sin(s \cdot Z)cos(s \cdot Z)$$
$$= 0$$

q.e.d.

f) $\vec{a}(t) = r''(t) = -b \cdot sin(t) \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + (b \cdot cos(t)) \cdot \vec{e}_3$

1.3 Aufgabe 9

a) Skizze:



b) $(x_1, 0, x_3) \Leftrightarrow x_2 = 0$

$(0, x_2, x_3) \Leftrightarrow x_1 = 0$

$x_3 = \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{25}}$

Schnittkurve 1: $x_3 = \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{4}}$

Schnittkurve 2: $x_3 = \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{25}}$