1 Hausaufgaben zum 19.10.2009

1.1 Aufgabe 2:

a) 1.

$$\begin{aligned}
&\vec{e_1} \cdot (\vec{e_2} + 2 \cdot \vec{e_1}) \ , \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \ , \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \\
&= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \ , \\
\Rightarrow &= 2 \ .
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&(3\vec{e_1} - \vec{e_2} + 2\vec{e_3}) \cdot (-\vec{e_1} + 7\vec{e_2} + 6\vec{e_3}) \ , \\
&= \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \ , \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \ , \\
&= 3 \cdot -1 + -1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 = -3 - 7 + 12 \ , \\
\Rightarrow &= 2 \ .
\end{aligned}$$

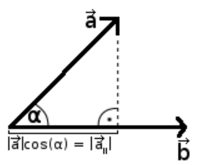
b)

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \ , \\
\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{!}{=} 0 \ , \\
\begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \ , \\
3\alpha - 10 + 18 = 0 \ , \\
\Rightarrow \alpha = -\frac{8}{3} \ .
\end{aligned}$$

c) Um zunächst $\vec{a}_{||}$ zu bestimmen, betrachten wir $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lediglich in der Ebene, die die beiden Vektoren aufspannen.

Hierbei ordnen wir Sie so an, dass sie in einem gemeinsamen Punkt fußen und somit ein rechtwinkliges Dreieck konstruierbar ist.

Nun sehen wir, dass $|\vec{a}_{||}|$ die Cosinus-Komponente von $|\vec{a}|$ mit dem Schnittwinkel α zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.



Da der $cos(\alpha)$ im Skalarprodukt von $\vec{a} \cdot \vec{b}$ auftaucht, lässt sich die Formel entsprechend umstellen:

$cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$,

$|\vec{a}_{||}| = |\vec{a}| \cdot cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$,

$= \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Um nun $\vec{a}_{||}$ aus $|\vec{a}_{||}|$ zu bestimmen, machen wir uns bewusst, dass $\vec{a}||\vec{b}$, sie also voneinander linear abhängig sind. Daraus folgt, dass $\frac{|\vec{a}_{||}|}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}_{||}}{\vec{b}}$.

$$\vec{a}_{||} = \frac{|\vec{a}_{||}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Um nun $\vec{a}_{\perp}$ zu bestimmen, benutzen wir die Eigenschaft von $\vec{a}$, dass $\vec{a} = \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp}$:

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{||} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} .$$

Prüfung zu $\vec{a}_{\perp} \cdot \vec{a}_{||} = 0$:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{9} \cdot (5 + 2 - 7) = 0 .$$