Übungen zur Mathematische Methoden der Physik
Armin Bunde, Wintersemester 2009/2010
Blatt 6

Übungsblatt zu den Übungen am 23.11.2009

Aufgabe 16:

Die Matrix $D^{(k)}\,(\phi)$ mit den Komponenten

$$D_{ij}^{(k)}\,(\phi) \;=\; \delta_{ij}\delta_{ik} \;+\; \delta_{ij}\,(1\;-\;\delta_{ik})\,\cos(\phi) \;+\; \epsilon_{ijk}\sin(\phi)$$

stellt eine Drehung um die x_k-Achse um den Winkel ϕ dar.

a) Geben Sie die Drehmatrix für die x_1-, x_2- und x_3-Achse explizit an.

b) Eine Koordinatentransformation möge aus einer Drehung um 90° um die x_1-Achse, gefolgt von einer Drehung um 90° um die (neue) x_2-Achse, gefolgt von einer Drehung um 90° um die (neue) x_3-Achse bestehen. Geben Sie die zugehörige Drehmatrix A und die dazu inverse A^{-1} an.

c) Zeigen Sie: Für zwei beliebige quadratische und orthonormale Matrizen A und B ist auch das Produkt $A\,\cdot\,B$ orthonormal. (Zur Erinnerung: Matrizen sind orthonormal, wenn ihre Zeilenvektoren orthonormal sind, d. h. $\sum_k\, a_{ik}a_{jk} \;=\; \delta_{ij}$).

Aufgabe 17:

a) Welche der folgenden Matrizen sind Drehmatrizen?

$$A \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{2}{15}\sqrt{5} & -\frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{4}{15}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

b) Eine Drehung um die x_3-Achse wird durch folgende Matrix beschrieben:

$$D^{(3)}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifizieren Sie, daß das Ergebnis von zwei Drehungen um die x_3-Achse mit den Winkeln ϕ_1 und ϕ_2 einer einzelnen Drehung um den Winkel $\phi_1 + \phi_2$ entspricht.

c) Geben Sie, soweit vorhanden, die Inversen der Matrizen von 17 a) an.

d) Invertieren Sie

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 18 (schriftlich):

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mit der Cramerschen Regel:

a)

$$\begin{aligned} (i) \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ (ii) \quad & 4x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ (iii) \quad & 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (i) \quad & 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 1 \\ (ii) \quad & -x_2 + 2x_2 - 2x_3 = -4 \\ (iii) \quad & x_1 - 2x_2 = 6 \end{aligned}$$