1 Präsenzaufgabe 31.10.12

1.1 Aufgabe

Warum Pivotisierung?
Betrachte das LGS:
$Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 0.001 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$
Exakte Lösung: $x = (-1.996,\ 3.998)^T$ mit der exakten LR-Zerlegung
$LR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1000 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.001 & -1 \\ 0 & 1002 \end{pmatrix} = A$

Angenommen, wir arbeiten mit einer Fehlergenauigkeit von $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$
Die jew. Rechenop. seien $\oplus$, $\ominus$, $\odot$, $\oslash$

1. Ohne Pivotisierung
   $$L^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1000 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0.001 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.001 & -1 \\ 0 & \underset{\oplus 2}{1000} \end{pmatrix} = R$$
   Vorwärtselimination:
   $$L^{-1}c = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1000 & 1 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} -4 \\ \underset{\oplus 6}{4010} \end{pmatrix}$$
   Rücksubstitution:
   $$Rx = c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0.001 & 1 \\ 0 & 1000 \end{pmatrix} x$$
   $$= \begin{pmatrix} -4 \\ 4010 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} (-4 \oplus 4.01) \oslash 0.001 \\ 4010 \oslash 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4.01 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1.996 \\ 3.998 \end{pmatrix}$$
   Fehler: $\left|\left| \begin{pmatrix} 10 \\ 4.01 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1,996 \\ 3.998 \end{pmatrix} \right|\right|_\infty = 11.996$
   Defekt: $||\delta b||_\infty = ||Ax - b||_\infty = \left|\left| \begin{pmatrix} -4 \\ 18.02 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right|\right|_\infty = 12.02$
2. Mit Spaltenpivotisierung
   $$R = G_1 \odot P_0 \odot AR = G_1 \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0.001 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.001 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.001 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   Also $L = G_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.001 & 1 \end{pmatrix}$
   Vorwärtselim.:
   $$L^{-1}c = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.001 & 1 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 6 \\ \underset{\ominus 0.006}{-4.01} \end{pmatrix}$$
   Rücksubst.:
   $$Rx = c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 6 \\ -4.01 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 6 \ominus 2 \ominus 4.01 \\ -4.01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.02 \\ 4.01 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.998 \\ 3.998 \end{pmatrix}$$

Fehler: 0.024, Defekt:0.012

3. Mit Totalpivositierung

$$PAQ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0.001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0.501 \end{pmatrix}$$

Vorwärtsel.: $L^{-1}c = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} 6 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 6 \\ \underset{\ominus 3}{-1} \end{pmatrix}$

Rückwärtssubst.:

$$R\tilde{x} = c \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0.501 \end{pmatrix} \tilde{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix} (6 \ominus 1 \odot 2) \oslash 2 \\ -1 \oslash 0.501 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = Q\tilde{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.996 \\ 3.998 \end{pmatrix}$$

Fehler:0.004, Defekt:0.002

1.2 Aufgabe

Konditionszahl

$cond(A) = ||A||A^{-1}||$

(hängt von der verw. Matrixnorm ab, $cond_2(A)$, $cond_\infty(A)$)

Sei $\tilde{x}$ eine Näherung der Lösung $Ax = b, \quad x \neq 0$.

Dann gilt für den Residuenvektor $r = A\tilde{x} - b$

und für den Fehlervektor $z = x - \tilde{x} = x - (A^{-1}r + \underbrace{A^{-1}b}_{=x}) = -A^{-1}r$.

Folgt mit $||.||_M$ als zu $||.||_v$ verträglichen Norm:

$$||b||_v = || - Ax||_v \leq ||A||_M ||x||_v \Leftrightarrow \frac{1}{||x||_v} \leq \frac{||A||_M}{||b||_v}$$

$$||z||_v = || - A^{-1}r||_v \leq ||A^{-1}||_M ||r||_v$$

Damit gilt für den relativen Fehler:

$$\frac{||x-\tilde{x}||}{||x||} = \frac{||z||}{||x||} \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \frac{||r||}{||b||} = cond(A) \frac{||r||}{||b||}$$

Aufgabe: $cond_\infty(A) = \left\| \begin{pmatrix} 0.001 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\|_\infty \left\| \frac{1}{1.002} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0.001 \end{pmatrix} \right\|_\infty \approx q$

Folgt:

1. $\frac{||x-\tilde{x}||_\infty}{||x||_\infty} \leq cond_\infty(A) = \frac{||r||_\infty}{||b||_\infty} \approx q \frac{12.02}{6} = 18.03$ (ohne Pivotisierung)
2. $\frac{||x-\tilde{x}||_\infty}{||x||_\infty} \leq 0.018$ (mit Spaltenpivotisierung)
3. $\frac{||x-\tilde{x}||_\infty}{||x||_\infty} \leq 0.003$ (mit Totalpivotisierung)

1.3 Tipp Blatt 2

Erinnerung

orthogonale Matrizen:

Eine Matrix U heißt orthogonal falls
$U^{-1} = U'$ mit U' als konj. Matrix zu U
$U' = U^T$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$U' = \bar{U}^T$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Skalarprodukt:

$$< x, y >:= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ , \quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$$
$$< x, y >:= \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \ , \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

Behauptung:

Wenn U orth., dann gilt für $x \in \mathbb{K}$: $||Ux||_2 = ||x||_2$

Beweis:

$$||Ux||_2^2 =< Ux, Ux >=< x, U'Ux >=< x, x >= ||x||_2^2$$