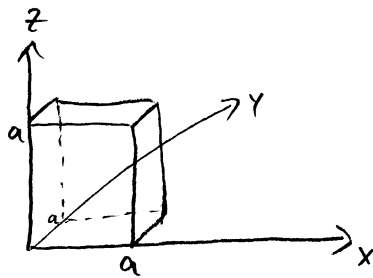


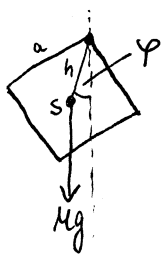
(a)


$$\begin{aligned} I &= \int d^3r \rho(\vec{r}) (x^2 + y^2) \\ &= \rho_0 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz (x^2 + y^2) \\ &= \rho_0 a \int_0^a dx \int_0^a dy (x^2 + y^2) \\ &= \rho_0 a \int_0^a dx \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^a \\ &\quad \quad \quad x^2 a + \frac{1}{3} a^3 \\ &= \rho_0 a \left(\frac{1}{3} x^3 a + \frac{1}{3} a^3 x \right) \Big|_0^a \\ &= \frac{2}{3} \rho_0 a^5 \\ &= \frac{2}{3} M a^2 \end{aligned}$$

mit $M = \rho_0 a^3$

$$= \frac{2}{3} M a^2$$

(b)



physikalisches Pendel

Bewegungspl. aus Vorlesung

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgh}{I} \sin \varphi = 0$$

- h ist senkrechter Abstand des Schwerpunkts S von Drehachse: $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$

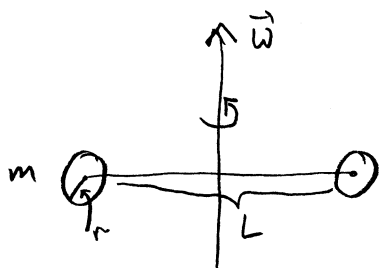
- Näherung für kleine Schwingungen: $\sin \varphi \approx \varphi$

- mit (a) folgt: $\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2\sqrt{2}a} \varphi = 0$ (harm. Osz. $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$)

\Rightarrow Schwingungsdauer: $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2\sqrt{2}a}}$

Kreisfrequenz: $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$

P10



Vorlesung: Trägheitsmoment einer Kugel mit Achse durch Mittelpunkt

$$I_K = \frac{2}{5} m r^2$$

Trägheitsmoment des Hantel mit Satz von Steiner

$$\begin{aligned} I_H &= 2 I_K + 2 m \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \frac{4}{5} m r^2 + 2 m \left(\frac{L}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Drehimpuls} \quad \vec{L} = I \cdot \vec{\omega}, \quad \vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$$

$$\text{also} \quad L_z = I \omega$$

$$= \left(\frac{4}{5} m r^2 + 2 m \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right) \omega$$

$$\stackrel{r \ll L}{=} 2 m \left(\frac{L}{2}\right)^2 \omega \quad (\text{Hantel mit 2 Punktmassen})$$

Jetzt $L \rightarrow \frac{L}{2}$:

$$\begin{aligned} \text{Drehimpulserhaltung: } L_z &= I' \omega' \\ &= \left(\frac{4}{5} m r^2 + 2 m \left(\frac{L}{4}\right)^2 \right) \omega' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega' = \frac{L_z}{I'} = \frac{I \omega}{I'} = \frac{\frac{4}{5} m r^2 + 2 m \left(\frac{L}{2}\right)^2}{\frac{4}{5} m r^2 + 2 m \left(\frac{L}{4}\right)^2} \omega$$

$$\stackrel{r \ll L}{=} \frac{2 m \left(\frac{L}{2}\right)^2}{2 m \left(\frac{L}{4}\right)^2} \omega$$

$$= 4 \omega$$

(Hantel rotiert also schneller!)