9 Korrektur zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, den 12.1.2010

9.1

$f : \mathbb{R}[1,2] \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ ist streng monoton fallend auf zusammenhängenden $= \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow$ f hat einzige Nst bei x=1,5.

Betrachte

1 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) : f(x) \to 0 \ (x \to -\infty)$

2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) : f(x) \to -\infty \ (x \to 1-)$

3 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) : f(x) \to +\infty \ (x \to 1+)$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) : f(x) \to -\infty \ (x \to 2-)$

5 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) : f(x) \to +\infty \ (x \to 2+)$

6 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) : f(x) \to 0\infty \ (x \to 1\infty)$

$\Rightarrow$ f nimmt nach dem Zwischenwertsatz jedes $y_0 \in (-\infty, 0)$ in $(-\infty, 1)$ an.

$\forall y_0 \in (-\infty, 0) \exists x_0 \in (-\infty, 1) | f(x_0) = y_0 \quad f|_{(-\infty,1)}$ streng monoton fallend $\Rightarrow$ x_0 ist eindeutig

Nach 3, 4 Zwischenwertstz $\Rightarrow$ $\forall y_0 \in \mathbb{R} \exists x_0 \in (1,2) | f(x_0) = y_0$, wobei x_0 durch die strenge Monotonie eindeutig ist.

Nach 5, 6 Zwischwertsatz $\Rightarrow$ $\forall y_0 > 0 \exists x_0 > 2 | f(x_0) = y_0$, wobei x_0 eindeutig ist wegen strenger Monotonie

9.2

Suchen Lsg. der Gleichung $x = e^{-\lambda x}$ in [0,1] $\Leftrightarrow f(x) := x - e^{-\lambda x} = 0 \Rightarrow$ f stetig und streng monoton steigend

$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 - e^{-\lambda} > 0 \end{array}\right\} \to [0,1] | f(\xi) = 0$ nach dem Zwischenwertsatz. ξ ist eindeutig, da f str. monoton.

9.3

$a)b) f(x) = \sqrt{x}$

$|f(x+\delta) - f(x)| = |\sqrt{x+\delta} - \sqrt{x}| = \frac{|x+\delta-x|}{|\sqrt{x+\delta}+\sqrt{x}|} \leq \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta}$

$sign|(f(x+\delta) - f(x)| \leq \sqrt{\delta} \to 0 \ (\delta \to 0)$

$(f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow |f(x+\delta) + f(x)| = |\frac{1}{x+\delta} - \frac{1}{\delta}| = \frac{\delta}{|x||x+\delta|} = \frac{1}{x} \frac{\delta}{|x|+\delta})$

Sei $\varepsilon > 0, \ \delta := \varepsilon^2$

Dann gilt $\forall x, y \geq 0 || x - y| < \delta : |f(y) - f(x)| = |\sqrt{y} - \sqrt{x}| = \frac{|y-x|}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{|y-x|}{\sqrt{x}+\sqrt{y-x+x}} < \frac{|y-x|}{\sqrt{y-x}} = \sqrt{y-x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$

$\Rightarrow$ f glm stetig auf [0,∞]

c) $f : [-1,1] \to \mathbb{R} : \ f(x) = x^2 sin(\frac{1}{x}) \ \forall x \pm 0, \ f(0) = 0$

f ist stetig auf (0,1]$\cup$[-1,0) als Komposition stetiger Funktionen. $|f(\delta) - f(0)| = |\delta^2 sin(\frac{1}{\delta})| \leq \delta^2 \to 0 \ (\delta \to 0)$

$\Rightarrow$ f stetig im Punkt 0.

$\Rightarrow$ f stetig auf [-1,1]

$\Rightarrow$ f glm stetig auf [-1,1], da [-1,1]kompakt nach Heine-Bored.

9.4

$$detA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 * 1 - (-1)(-4) = -3$$

Frage: $\exists M : [0,1] \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ stetig $|M(0) = I_{3\times 3} \wedge M(1) = A \wedge M$ invertierbar $\forall t \in [0,1]$

Betrachte: $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. $f(t) = det(M(t))$ M(t) stetig auf [0,1]

$\Rightarrow f(0) = det(I) = 1 \wedge f(1) = detA = -3$

$\Rightarrow \exists \xi \in (0,1)|f(\xi) = 0 \Rightarrow M(\xi)$ ist nicht invertierbar.

9.5

det multilinear, alternierend, $det(I) = 1$, dann $det(a, ..., a_n) = 0 \Leftrightarrow \{a, ..., a_n\}$ lin. abh.

„$\Leftarrow$"

Sei $a_i = a_j$ ohne Einschränkugn $i = 1, j = 2$

$det(a_1, a_2, ..., a_n) = -det(a_2, a_1, a_3, ..., a_n) = -det(a_1, a_2, ..., a_n)$

$\Rightarrow det(...) = 0$

Sei $\{a_n, ..., a_n\}$ lin. abh. ohne Einschränkung $a_1 \neq 0$,

dann wären alle $(a_k)_{a=1}^n \Rightarrow det(0, ..., 0) = 0$ wegen Multilinearität.

$\Rightarrow \exists i \in [1, n]|a_i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j a_j$ ohne Einschr. i=1

$$\Rightarrow det(a_1, ..., a_n) = det(\sum_{j=2}^{n} \lambda_j a_j, a_2, ..., a_n) = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j det(a_j, a_2, a_3, ..., a_n) = 0$$

„$\Rightarrow$"

$\{a_1, ..., a_n\}$ lin unabh. $\Rightarrow \{a_1, ..., a_n\}$ ist Basis des K^n.

$$\Rightarrow \ \exists(\lambda_i^{(j)})_{j=1}^n e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(j)} a_i$$

$$1 = det(I) = det(e_1, ..., e_n) = det(a_j)_{j=1}^n = det(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(j)} a_i)_{j=1}^n$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \sum_{j_3=1}^{n} ... \sum_{j_n=1}^{n} \lambda_{j_1} \cdot \lambda_{j_2} \cdot \lambda_{j_3} \cdots \lambda_{j_n} det(a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_n})$$

$$= \sum_{j_k \in \{1,...,n\}^n} (\delta_{jk}) \prod_{k=1}^{n} \lambda_{j_k} det(a_i)_{i=1}^n | \delta_{jn} \in [-1, 0, +1]$$

9.6

leicht

9.7

a) $s_{k+1} = \frac{ks_k + 1\mu_{k+1}}{k+1} = \frac{ks_k + s_k + r}{k+1} = s_k + \frac{r}{k+1} \Rightarrow s_k = \sum\limits_{j=0}^{k-1} \frac{r}{j+1} + s_0 = r \sum\limits_{j=1}^{k} \frac{1}{j} + s_0 \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

$\mu_{k+1} = s_k + r$

$\mu_k = \mu_{k+1} - \mu_k = s_{k+1} - s_k = \frac{r}{k+1} \to 0$

b) $15\text{cm} \leq s_n = r \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ also $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \frac{15cm}{1{,}1cm} \geq 13$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum\limits_{j=0}^{\nu} \sum\limits_{k=2^j}^{2^{\nu+1}-1} \frac{1}{k} \leq \sum\limits_{j=0}^{\nu} \sum\limits_{k=2^j}^{2^{\nu+1}-1} 2^{-j}$

$= \sum\limits_{j=0}^{\nu} 1 = \nu \Rightarrow n \geq 2^\nu$

$\Rightarrow \nu = 13 \Rightarrow n \geq 2^{13} = 8192$