

9 Korrektur zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, den 12.1.2010

9.1

$f : \mathbb{R}[1, 2] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ ist streng monoton fallend auf zusammenhängenden
 $= \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow f$ hat einzige Nst bei $x=1,5$.

Betrachte

- 1 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) : f(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty)$
- 2 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) : f(x) \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow 1-)$
- 3 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) : f(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 1+)$
- 4 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) : f(x) \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow 2-)$
- 5 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) : f(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow 2+)$
- 6 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) : f(x) \rightarrow 0\infty \quad (x \rightarrow 1\infty)$

$\Rightarrow f$ nimmt nach dem Zwischenwertsatz jedes $y_0 \in (-\infty, 0)$ in $(-\infty, 1)$ an.

$\forall y_0 \in (-\infty, 0) \exists x_0 \in (-\infty, 1) | f(x_0) = y_0 \quad f|_{(-\infty, 1)}$ streng monoton fallend $\Rightarrow x_0$ ist eindeutig

Nach 3, 4 Zwischenwertsatz $\Rightarrow \forall y_0 \in \mathbb{R} \exists x_0 \in (1, 2) | f(x_0) = y_0$, wobei x_0 durch die strenge Monotonie eindeutig ist.

Nach 5, 6 Zwischenwertsatz $\Rightarrow \forall y_0 > 0 \exists x_0 > 2 | f(x_0) = y_0$, wobei x_0 eindeutig ist wegen strenger Monotonie

9.2

Suchen Lsg. der Gleichung $x = e^{-\lambda x}$ in $[0, 1] \Leftrightarrow f(x) := x - e^{-\lambda x} = 0 \Rightarrow f$ stetig und streng monoton steigend

$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 - e^{-\lambda} > 0 \end{array} \right\} \rightarrow [0, 1] | f(\xi) = 0$ nach dem Zwischenwertsatz. ξ ist eindeutig, da f str. monoton.

9.3

a) b) $f(x) = \sqrt{x}$

$$|f(x + \delta) - f(x)| = |\sqrt{x + \delta} - \sqrt{x}| = \frac{|x + \delta - x|}{|\sqrt{x + \delta} + \sqrt{x}|} \leq \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta}$$

$\text{sign} |f(x + \delta) - f(x)| \leq \sqrt{\delta} \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0)$

$$(f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow |f(x + \delta) - f(x)| = \left| \frac{1}{x + \delta} - \frac{1}{x} \right| = \frac{\delta}{|x||x + \delta|} = \frac{1}{x} \frac{\delta}{|x + \delta|})$$

Sei $\varepsilon > 0$, $\delta := \varepsilon^2$

Dann gilt $\forall x, y \geq 0 |x - y| < \delta : |f(y) - f(x)| = |\sqrt{y} - \sqrt{x}| = \frac{|y - x|}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{y - x}} < \frac{|y - x|}{\sqrt{y - x}} = \sqrt{y - x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$

$\Rightarrow f$ glm stetig auf $[0, \infty]$

c) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x}) \quad \forall x \neq 0, f(0) = 0$

f ist stetig auf $(0, 1] \cup [-1, 0)$ als Komposition stetiger Funktionen. $|f(\delta) - f(0)| = |\delta^2 \sin(\frac{1}{\delta})| \leq \delta^2 \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0)$

$\Rightarrow f$ stetig im Punkt 0.

$\Rightarrow f$ stetig auf $[-1, 1]$

$\Rightarrow f$ glm stetig auf $[-1, 1]$, da $[-1, 1]$ kompakt nach Heine-Borel.

9.4

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 * 1 - (-1)(-4) = -3$$

Frage: $\exists M : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ stetig $|M(0) = I_{3 \times 3} \wedge M(1) = A \wedge M$ invertierbar $\forall t \in [0, 1]$

Betrachte: $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. $f(t) = \det(M(t))$ $M(t)$ stetig auf $[0, 1]$

$$\Rightarrow f(0) = \det(I) = 1 \wedge f(1) = \det A = -3$$

$$\Rightarrow \exists \xi \in (0, 1) | f(\xi) = 0 \Rightarrow M(\xi) \text{ ist nicht invertierbar.}$$

9.5

\det multilinear, alternierend, $\det(I) = 1$, dann $\det(a_1, \dots, a_n) = 0 \Leftrightarrow \{a_1, \dots, a_n\}$ lin. abh.

„ \Leftarrow “

Sei $a_i = a_j$ ohne Einschränkung $i = 1, j = 2$

$$\det(a_1, a_2, \dots, a_n) = -\det(a_2, a_1, a_3, \dots, a_n) = -\det(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\Rightarrow \det(\dots) = 0$$

Sei $\{a_1, \dots, a_n\}$ lin. abh. ohne Einschränkung $a_1 \neq 0$,

dann wären alle $(a_k)_{k=1}^n \Rightarrow \det(0, \dots, 0) = 0$ wegen Multilinearität.

$$\Rightarrow \exists i \in [1, n] | a_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j a_j \text{ ohne Einschr. } i=1$$

$$\Rightarrow \det(a_1, \dots, a_n) = \det\left(\sum_{j=2}^n \lambda_j a_j, a_2, \dots, a_n\right) = \sum_{j=2}^n \lambda_j \det(a_j, a_2, a_3, \dots, a_n) = 0$$

„ \Rightarrow “

$\{a_1, \dots, a_n\}$ lin unabh. $\Rightarrow \{a_1, \dots, a_n\}$ ist Basis des K^n .

$$\Rightarrow \exists (\lambda_i^{(j)})_{j=1}^n e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(j)} a_i$$

$$1 = \det(I) = \det(e_1, \dots, e_n) = \det(a_j)_{j=1}^n = \det\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{(j)} a_i\right)_{j=1}^n$$

$$= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \sum_{j_3=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n \lambda_{j_1} \cdot \lambda_{j_2} \cdot \lambda_{j_3} \cdot \dots \cdot \lambda_{j_n} \det(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_n})$$

$$= \sum_{j_k \in \{1, \dots, n\}^n} (\delta_{jk}) \prod_{k=1}^n \lambda_{j_k} \det(a_i)_{i=1}^n | \delta_{jn} \in [-1, 0, +1]$$

9.6

leicht

9.7

$$\text{a) } s_{k+1} = \frac{ks_k + 1 + \mu_{k+1}}{k+1} = \frac{ks_k + s_k + r}{k+1} = s_k + \frac{r}{k+1} \Rightarrow s_k = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{r}{j+1} + s_0 = r \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + s_0 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$$

$$\mu_{k+1} = s_k + r$$

$$\mu_k = \mu_{k+1} - \mu_k = s_{k+1} - s_k = \frac{r}{k+1} \rightarrow 0$$

$$\text{b) } 15\text{cm} \leq s_n = r \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ also } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \frac{15\text{cm}}{1,1\text{cm}} \geq 13$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{k=2^j}^{2^{\nu+1}-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{j=0}^{\nu} \sum_{k=2^j}^{2^{\nu+1}-1} 2^{-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\nu} 1 = \nu \Rightarrow n \geq 2^{\nu}$$

$$\Rightarrow \nu = 13 \Rightarrow n \geq 2^{13} = 8192$$