Julian Bergmann
Dennis Getkow 1/2

Hausaufgabe zur Höheren Quantenmechanik (TP-02) 4/5 SM.

-Blatt 1

Aufgabe 1) $H = H_0 + H'$, $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m^2}{2}\omega^2 x^2$, $H' = \varkappa x^3 + \lambda x^4$

Aus Präsenzaufgabe 1: $H_0 = \hbar\omega(a^+a + \frac{1}{2})$

$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^+)$

$p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a - a^+)$ ✓

Zu untersuchen: $\langle 0|H|0\rangle_1 = \langle 0|H_0|0\rangle + \langle 0|H'|0\rangle$

Betrachte $\langle 0|H_0|0\rangle$:

$$\langle 0|H_0|0\rangle = \langle 0|\hbar\omega(a^+a + \tfrac{1}{2})|0\rangle$$
$$= \hbar\omega \underbrace{\langle 0|a^+}_{=0}\underbrace{a|0\rangle}_{=0} + \hbar\omega\tfrac{1}{2}\langle 0|0\rangle$$
$$= \tfrac{1}{2}\hbar\omega$$ ✓

Betrachte nun $\langle 0|H'|0\rangle$:

$$\langle 0|H'|0\rangle = \langle 0|\varkappa x^3 + \lambda x^4|0\rangle$$
$$= \langle 0|\varkappa x^3|0\rangle + \langle 0|\lambda x^4|0\rangle$$ ✓

$$x^3 = \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^+)\right)^3$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^3 \varkappa\ \langle 0|x^3|0\rangle = \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^3 \varkappa\ \langle 0|(a + a^+)^3|0\rangle$$

Betr. $\langle 0|(a+a^+)^3|0\rangle = \langle 0|aaa + aa^+a + a^+aa + a^+a^+a + aaa^+ + aa^+a^+ + a^+aa^+ + a^+a^+a^+|0\rangle$

$$\underset{\substack{\langle 0|a^+ = 0 \\ a|0\rangle = 0}}{=} 0$$

(ungerade Anzahl von Operatoren) ✓

$$\Rightarrow \langle 0|\varkappa x^3|0\rangle = 0$$ ✓

Julian Bergmann
Dennis Getzkow

$$x^4 = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 (a+a^+)^4$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \lambda \langle 0 | x^4 | 0 \rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \lambda \langle 0 | (a+a^+)^4 | 0 \rangle$$

Betr. $\langle 0 | \underbrace{(a+a^+)^4}_{=(a+a^+)^3 \cdot (a+a^+)} | 0 \rangle = \langle 0 | (aaa + aa^+a + a^+aa + a^+a^+a$

$aaa^+ + aa^+a^+ + a^+aa^+ + a^+a^+a^+) \cdot a$

$+ (aaa + aa^+a + a^+aa + a^+a^+a$

$+ aaa^+ + aa^+a^+ + a^+aa^+ + a^+a^+a^+) \cdot a^+ | 0 \rangle$

$$\underset{a|0\rangle=0}{=} \langle 0 | aaaa^+ + aa^+aa^+ + a^+aaa^+ + a^+a^+aa^+ + aaa^+a^+ + aa^+a^+a^+ + a^+aa^+a^+ + a^+a^+a^+a^+ | 0 \rangle$$

$$\underset{\langle 0|a^+=0}{=} \langle 0 | aaaa^+ + aa^+aa^+ + aaa^+a^+ + aa^+a^+a^+ | 0 \rangle$$

$$= \underbrace{\langle 0 | a\underbrace{aaa^+ | 0 \rangle}_{=0}}_{=0} + \langle 0 | aa^+aa^+ | 0 \rangle + \langle 0 | aaa^+a^+ | 0 \rangle + \underbrace{\langle 0 | a\underbrace{a^+a^+a^+ | 0 \rangle}_{=0}}_{=0}$$

$$= \langle 0 | aa^+a \sqrt{1} | 1 \rangle + \langle 0 | aaa^+ \sqrt{1} | 1 \rangle$$

$$= \langle 0 | aa^+ | 0 \rangle \quad + \langle 0 | aa \sqrt{2} \sqrt{1} | 2 \rangle$$

$$= \langle 0 | a | 1 \rangle \quad + \sqrt{2} \langle 0 | a \sqrt{2} | 1 \rangle$$

$$= \underbrace{\langle 0 | 0 \rangle}_{=1} + 2 \underbrace{\langle 0 | 1 | 0 \rangle}_{=1}$$

$$\underset{\langle 0|0\rangle=1}{=} 3$$

✓

$$\Rightarrow \langle 0 | H | 0 \rangle_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega + 3\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \lambda$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{3}{4}\frac{\hbar^2}{m^2\omega^2}\lambda$$

✓

Bei negativem λ ist die Störung in jeden Fall negativ, da der x^2-Term entfällt. Für genügend kleine $\lambda < 0$ kann die Grundzustandsenergie negativ werden, was physikalisch keinen Sinn macht.