10 Korrektur zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, den 19.1.2010

10.1

$f : D \to \mathbb{C}, \quad x_0 \in D^0 = \{x \in D | \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq D\}$

Dann ist äquivalent

0) f ist diffbar in x_0. (d.h. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0) \in \mathbb{C}$

1) $\exists \alpha \in \mathbb{C} | \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B(x_0, \delta) : |f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)| \leq \varepsilon |x - x_0|$

2) $\exists \delta > 0, \alpha \in \mathbb{C}, r : B(x_0, \delta) \to \mathbb{C}$ *stetig*$| r(x_0) = 0 \ \wedge \ f(x) = f(x_0) + \alpha)x - x_0) + r(x)(x - x_0) \quad \forall x \in B(x_0, \delta)$

Beweis:

(0)$\Rightarrow$ (1):

Sei $\alpha := f'(x_0) \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0}}_{I(x)} \to 0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 || I(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D || x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)| = |I(x)||x - x_0| < \varepsilon |x - x_0| \quad \forall |x - x_0| < \delta$

(1)$\Rightarrow$ (2):

Def: $r : D \to \mathbb{C} : r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)-\alpha(x-x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ 0 & \forall x = x_0 \end{cases}$

Zu zeigen: r stetig in x_0: Sei $\varepsilon > 0$, nach (1 $\exists \delta > 0 | \forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta$.

$\forall x \neq x_0 \Rightarrow |r(x)| = \frac{|f(x)-f(x_0)\alpha(x-x_0)|}{|x-x_0|} < \varepsilon \frac{|x-x_0|}{|x-x_0|} = \varepsilon \Rightarrow r(x) \to 0 \ (x \to x_0)$ für $\varepsilon > 0$ beliebig.

d.h. r ist stetig in x_0 und damit in einer δ-Umgebung von x_0

(2)$\Rightarrow$(0): Betrachte

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)-\alpha(x-x_0)}{x-x_0} + \alpha = \frac{r(x)(x-x_0)}{x-x_0} + \alpha \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \alpha + \underbrace{r(x_0)}_{=0}$

$\Rightarrow$ f diffbar in x_0 $|f'(x_0) = \alpha$

10.2

a) f_n stetig in $D \subseteq \mathbb{C} \ \wedge \ f_n \overset{glm}{\longrightarrow} f$ stetig in D.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0, x \in D \Rightarrow \exists n_0(\varepsilon) || f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in D, \ n \geq n_0(\varepsilon)$

Da f_{n_0} stetig in $x_0 \Rightarrow \exists \delta(\varepsilon) > 0 || f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in B(x_0, \delta)$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$

b) $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} : f_n(x) = e^{-nx^2}$.

$\forall x > 0$: $f_n(x) = e^{-nx^2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

für $x = 0 : f_n(0) = 1 \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1$

Da $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} = \begin{cases} 1 & \forall x = 0 \\ 0 & \forall x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f_n$ nicht glm konvergent, dann wäre $f_n \xrightarrow{glm} f$

$\Rightarrow$ f stetig (Widerspruch, da $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} = \begin{cases} 1 & \forall x = 0 \\ 0 & \forall x \neq 0 \end{cases}$ nicht stetig).

c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_n(x) = \frac{1}{1+\underbrace{(x-n)^2}_{\to\infty}}$

$f_n(x) = f_0(x-n)$

$f_n(x) \to 0\ (n \to \infty) \forall x \in \mathbb{R}$

aber $f_n(n) = f_0(0) = 1 \not\to 0 \Rightarrow f_n$ nicht glm konv.

10.3

a) $f : (0,\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = sin(\frac{1}{x})$

Behandle $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} > 0,\ y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}} > 0$

$\Rightarrow x_1 - y_1 \to 0$ aber $f(x_n) = 1,\ f(y_n) = -1 \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| = 2 \not\to 0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 || f(x) - f(y)| < \varepsilon \ \ \forall |x-y| < \delta$

$\not\leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y || x - y| < \delta \ \wedge \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$

Für $\varepsilon = 1,\ \forall \delta > 0 \exists n_0(\delta) |x_n - y_n| < \delta \ \ \forall n \geq n_0$ aber $|f(x_n) - f(y_n)| = 2 > 1 = \varepsilon$

b) $sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist glm st, denn sin ist 2π periodisch und stetig

$\Rightarrow sin\ glm\ st\ auf\ [0, 2\pi]$

$\Rightarrow sin\ glm\ st\ auf\ \mathbb{R}$

oder:

$|sin(x+\delta) - sin(x)| = |sin(x)cos(\delta) + cos(x)sin(\delta) - sin(x)|$

$\leq |sin(x)||cos(\delta) - 1| + |cos(x)||sin(\delta)|$

$\leq |cos(\delta) - 1| + |sin(\delta)| \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$

$|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = \frac{|x-y|}{|x||y|} \leq |x-y|$, da $x, y \geq 1$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 || sin(u) - sin(v)| < \varepsilon \ \ \forall |u - v| < \delta$

$\Rightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \leq |x-y| \leq \delta$

$\Rightarrow |sin(\frac{1}{x}) - sin(\frac{1}{y})| < \varepsilon \ \ \forall |x-y| < \varepsilon$

10.4

leicht

10.5

$$V(x_1, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Beh.: $V(x, ..., x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i)$

Beweis per Induktion

$n=1: V(x_1)=1=\prod_0 (x_j-x_i)$; $n=2: V(x_1,x_2)=x_2-x_1=\prod_{i=1,\ j=2}(x_j-x_i)$

Betrachte $f(x):=V(x,x_2,...,x_n)$

$\Rightarrow (\forall i>1)\ \ f(x_i)=V(x_1,x_2,...,x_n)=0$ (da zwei gleiche Spalten),

f ist Polynom vom Grad n-1.

$\Rightarrow f(x)=a_0(x_2,x_3,...,x_n)\prod_{i=2}^{n}(x_i-x)\Rightarrow f(0)=\prod_{i=2}^{n}x_i\cdot a_0(x_2,...,x_n)$

$$V(0,x_2,...,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=1\begin{vmatrix} x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{n-1} \\ x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \cdots & x_3^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{i=2}^{n}x_i\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-2} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}}_{V(x_2,...,x_n)}$$

$\Rightarrow V(x_1,...,x_n)=\prod_{i=2}^{n}(x_i-x_1)\cdot V(x_2,...,x_n)$

$=\prod_{j=2}^{n}(x_j-x_i)\cdot\prod_{i=2}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n}(x_j-x_i)$

$=\prod_{i=1}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{n}(x_j-x_i)$