11 Übungen zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, den 26.1.2010

11.1

a) $\varrho = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup(\sqrt[n]{|a_n|})}$

$\varrho_1 = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup(\sqrt[n]{|\frac{1}{n^2}|})} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1$

$\varrho_2 = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup(\sqrt[n]{|n^4-4n^3|})} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1$

$\varrho_3 = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup(\sqrt[n]{|\frac{e^n+e^{-n}}{2}|})} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup(|\frac{\frac{1}{e}\sqrt[n]{e^{2n}+1}}{\sqrt[n]{2}}|)} = \frac{1}{e}$

$\varrho_4 = (2n = k) \Rightarrow \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup(|\sqrt[k]{k+2i}(2i)|)} = \frac{1}{|2i|} = \frac{1}{2}$

b) $\varrho(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)n\frac{x^{n+1}}{n+1}) = \varrho(\sum\limits_{n=-1}^{\infty}(-1)^n x^n) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} sup(\sqrt[n]{|(-1)^n|})} = |-1| = 1$

$\Rightarrow |x| < 1$ konvergent, $|x| > 1$ divergent.

Für x=1, also $\sum(-1)\frac{1}{n+1}$ gilt Leibniz-Kriterium:$\sum(-1)^n a_n$ konvergiert. Also konvergiert Reihe auch für x=1

Für x=-1, also $\sum(-1)^{2n+1}\frac{1}{n+1} = -\sum\frac{1}{n+1}$ gilt die Divergenz der harmonischen Reihe: $\sum\frac{1}{n}$ divergent. Also divergiert Reihe auch für x=-1.

Somit konvergiert Reihe für $-1 < x \leq 1$ und divergiert für $x \leq -1$ und $x > 1$.

11.2

Nein

11.3

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \frac{z^{-n}-z_0^{-n}}{z-z_0}$$

$$=\text{(geometrische Summenformel)} \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \frac{(z-z_0)\sum\limits_{k=0}^{-n-1} z_0^k z^{-n-1-k}}{z-z_0}$$

$$= \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \sum_{k=0}^{-n-1} z_0^k z^{-n-k-1} \to \sum_{k=0}^{-n-1} z_0^{-n-1} = -nz^{-n-1}$$

11.4

Es gilt $U \subset V$ (mit V Vektorraum über K) ist Unterraum, wenn gilt:

a) $\forall a, b \in U : a + b \in U$

b) $\forall a \in U, c \in K : c \cdot a \in U$

a) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{13}+b_{13} & a_{23}+b_{23} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & a_{3n}+b_{3n} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

Das ist auch symmetrische Matriz.

b) $$c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & c \cdot a_{13} & \cdots & c \cdot a_{1n} \\ c \cdot a_{12} & c \cdot a_{22} & c \cdot a_{23} & \cdots & c \cdot a_{2n} \\ c \cdot a_{13} & c \cdot a_{23} & c \cdot a_{33} & \cdots & c \cdot a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c \cdot a_{1n} & c \cdot a_{2n} & c \cdot a_{3n} & \cdots & c \cdot a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ebenfalls symmetrische Matrix

Dimension:

Eine Basis für den Vektorraum $K^{n \times n}$ wären n^2 Matrizen, bei denen jede jeweils eine 1 an einer anderen stelle besitzt und sonst 0. Ein Beispiel einer dieser n^2 Matrizen wäre $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Bei symmetrischen Matrizen, sind die Elemente des Elementareals unterhalb der Diagonalen gleich derjenigen oberhalb der Diagonalen, also an der Diagonalen gespiegelt. Somit kann man die Menge der Matrizen der Basis zu $K^{n \times n}$, die nur den Bereich oberhalb der Diagonalen erstellen können ebenfalls an der Diagonalen spiegeln und jene, die an der Stelle des nun entstandenen Eementes ungleich 0 bereits ein Element ungleich 0 haben, entfernen, um nun nur noch symmetrische Matrizen erstellen zu können. Veranschaulicht gelangt man nun zu Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Folglich müssen die Matrizen, die die Diagonale erstellen, übernommen werden, die Matrizen für Elemente über der Diagonalen verändert (gespiegelt an Diagonalen) und die Matrizen für Elemente unter der Diagonalen entfernt werden. Also halbiert sich die Anzahl der Matrizen für Elemente außerhalb der Diagonalen.

Somit hat die neue Basis für symmetrische Matrizen $\frac{n^2-n}{2} + n$ Matrizen. Da diese Matrizen so konzipiert sind, da an der Position des 1-Elementes in einer beliebigen Matrix aus der Basis in allen anderen Matrizen eine 0 steht, sind sie linear unabhängig und somit Basis. Damit sei auch die Dimension des Unterraums der symmetrischen Matrizen $\frac{n^2-n}{2} + n$.

11.5

Angenommen: V sei aufgespannt durch $(1, 0, 0, 0)$ und $(0, 1, 0, 0)$.

Beweis: $$\begin{array}{lllllll} I: & 1a+ & 3b+ & 1c+ & 0d & =0 \\ II: & 2a+ & 4b+ & 0c+ & 1d & =0 \\ III: & -1a+ & 0b+ & 0c+ & 0d & =0 \\ IV: & 3a+ & 1b+ & 0c+ & 0d & =0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Aus III folgt: a=0. Mit a=0 und IV folgt: b=0. Aus I und a=0 und b=0 folgt c=0. Mit a=b=0 und II folgt d=0. also a=b=c=d=0 als einzige Lösung des LGS.

Somit sind die 4 Vektoren linear unabhängig, also Basis von $\mathbb{R}^4$ und $V \oplus U = \mathbb{R}^4$.

Angenommen: W sei aufgespannt durch $(0,0,1,0)$ und $(0,0,0,1)$

Beweis:
$$\begin{array}{lllllll} I: & 1a+ & 3b+ & 01c+ & 0d & =0 \\ II: & 2a+ & 4b+ & 0c+ & 0d & =0 \\ III: & -1a+ & 0b+ & 1c+ & 0d & =0 \\ IV: & 3a+ & 1b+ & 0c+ & 1d & =0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Aus III folgt a=c. Aus I folgt a=-3b. Aus II folgt a=-2b. Mit II und I folgt also -3b=-2b. Also b=0. Aus I und b=0 folgt also a=0 und mit III dann auch c=0. Mit a=b=c=0 folgt mit IV dann d=0.

Somit sind die 4 Vektoren linear unabhängig, also Basis von $\mathbb{R}^4$ und $V \oplus U$.

11.6

i) Der Rang von A sind die linear unabhängigen Spalten. Da hier die 1. Spalte die 2. und die 3. erzeugen kann, ist hier $rang(A) = 2$

ii) $Kern(\hat{A})$: Menge der Vektoren, die mit $\hat{A}$ auf 0 abgebildet werden.

Daher $A \cdot x = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{array}{llllll} I: & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & =0 \\ II: & 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +7x_4 & =0 \\ III: & x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +5x_4 & =0 \end{array}$$

$\Rightarrow III - I : x_4 = 0 \;\Rightarrow x_1 = -2x_2 - 3x_3$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x_3 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da alle Vektoren, mit denen $\hat{A}$ auf 0 abbildet, durch eine Linerakombination von 2 linear unabhängigen Vektoren darstellbar sind, wird der Vektorraum, der diese Vektoren darstellt durch diese beiden Vektoren aufgespannt. Daher ist die Dimension dieses Vektorraums, also $Dim(Kern(\hat{A})) = 2$

iii) Da $Kern(\hat{A})$ wie in ii) gezeigt von 2 Vektoren aufgespannt wird, sind diese eine Basis zu $Kern(\hat{A})$. Folgliche Lösung: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$