10 Korrektur zu Mathematik für Physiker zum Dienstag, den 19.1.2010

10.1

a)

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat konv. radius $\varrho(...) = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}^2} = 1$

2) $\sum (n^4 - 4n^3) z^n$ Betrachte: $\sqrt[n]{n^4 - 4n^3} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{1-4/n} \to 1 \Rightarrow \varrho(...) = 1$

3) $\sum \frac{e^n + e^{-n}}{2} z^n \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{e^n+e^{-n}}{2}} = \frac{\sqrt[n]{e^n}}{\sqrt[n]{2}} \sqrt[n]{1+e^{-2n}} \to e \Rightarrow \varrho = \frac{1}{e}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+2i)(2iz)^{2n} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+2i)(2i)^k z^k * 1_{\{k\ gerade\}}$

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[n]{|(k+2i)(2i)^k 1_{\{k\ gerade\}}|} = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[n]{|k+2i|} 2 * 1_{\{k\ gerade\}} = 2 \Rightarrow \varrho = \frac{1}{2}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \varrho(...) = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}} = 1 \Rightarrow \sum$ konv. $\forall |x| < 1$, divergiert $\forall |x| > 1$

Bleiben x=1 und x=-1.

Für x=1: $\sum (-1)^n \frac{1}{n+1}$ konv. nach Leibniz.

Für x=-1: $\sum (-1)^n \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -\sum \frac{1}{n+1}$ div.(harmonische Reihe)

10.2

a) $(1-x^2)y'' - wxy' + n*(n+1)y = 0$

$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$

$\Rightarrow y' = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j x^{j-1}$

$\Rightarrow y'' = \sum_{j=2}^{\infty} a_j j(j-1) x^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+2}(j+2)(j+1)x^j$

$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} x^j (a_{j+2}(j+2)(j+1) - a_j j(j-1) - 2a_j j + n(n+1)a_j))$

$= \sum_{j=0}^{\infty} x^j ((j+2)(j+1)a_{j+2} - ((j+1)j - n(n+1))a_j) = 0$

$\Rightarrow a_{j+2} = \frac{(j+1)j-(n+1)n}{(j+1)(j+2)} a_j$

b) y Polynom $\Leftrightarrow a_j = 0 \forall j = j_0$

$a_{j_0} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{a_{j_0-2} = 0}_{\Leftrightarrow a_{j_0 mod 2} = 0} \quad \wedge \quad \underbrace{(j_0+1)j_0 = (n+1)n}_{\substack{\Leftrightarrow j_0^2 + j_0 - n(n+1) = 0 \\ \Leftrightarrow j_0 = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ \Leftrightarrow j_0 = -\frac{1}{2} + n + \frac{1}{2} = n}}$

D.h. falls n gerade, muss $a_1 = 0$ sein und $grad(y) = n$ und falls n ungerade, muss $a_0 = 0$ sein und $grad(y) = n$.

c) $n = 0 : J(x,c) = o(0+1)c = 0 \Rightarrow$ für n=0 erfüllt jede Konstante die DGL

$n = 1 : J(x,a,x) = -2xa_1 + 1*2*a_1 = 0$, für n=1 erfüllen alle Funktionen vom Typ y=ax die DGL.

$n = 2 : \frac{0*1-3*2}{1*2} a_0 = -3*a_0 \Rightarrow y(x) = (-3x^2+1)a_0$

$n = 3 :\Rightarrow a_0 = 0, a_1$ beliebig, $a_3 = \frac{2*1-4*3}{2*3} a_1 = -\frac{5}{3} a_1, \Rightarrow y(x) = (-\frac{5}{3}x^3 + x)a_1$

$n = 4 :\Rightarrow a_1 = 0, a_0$ beliebig, $a_2 = -\frac{5*4}{1*2} a_0 \Rightarrow a_4 = \frac{3*2-5*4}{2*4} a_2 = -\frac{14}{12} a_2 = \frac{140}{12} a_1$

10.3

$$f(z) = z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

$$\Rightarrow \frac{f(z+\delta)-f(z)}{\delta} = \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{(z+\delta)^n} - \frac{1}{z^n}\right) = \frac{1}{\delta}\frac{z^n-(z-\delta)^n}{z^n(z-\delta)^n} = \frac{1}{\delta}\frac{z^n \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{n-k}\delta^k}{z^n(z+\delta)^n}$$

$$= \frac{-nz^{n-1}\cancel{\delta}+0(\delta^{\cancel{2}})}{\cancel{\delta}z^n(z+\delta)^n} \xrightarrow[\delta \to 0]{} \frac{-nz^{n-1}+0}{z^n * z^n} = -nz^{-1-n} = \frac{n}{z^{n+1}}$$

10.4

$\mathbb{R}^{n\times n}$ ist $\mathbb{R}-VR$ der Dim n^2

$(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}^n$ ist symmetrisch $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \forall i,j = 1,...,n$

$U := \{(a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n} symm.\}$

Sei $(a_{ij}),\ (b_{ij}) \in U,\ \lambda \in \mathbb{R}$

$a_{ij} + \lambda b_{ij} = a_{ji} + \lambda b_{ji} \Rightarrow (a_{ij}) + \lambda b_{ij}$ ist symmetrisch

$\Rightarrow$ U ist Unterraum

Betrache $\forall 1 \leq i_0 \leq j_0 \leq n$

$v_{i_0 j_0} = (\delta_{ii_0}\delta_{jj_0} + (1-\delta_{i_0 j_0})\delta_{ij_0}\delta_{ji_0})_{i,j=1}^n$

Sei (a_{ij}) symm $\Rightarrow (a_{ij}) = \sum\limits_{1\leq i_0 \leq j_0 \leq n} a_{ij}v_{ij}$

Sei $\sum \lambda_{ij}v_{ij} = 0 \Rightarrow \lambda_{ij} = 0 \forall i,j \Rightarrow (v_{ij})_{1\leq i_0\leq j_0\leq n}$ ist Basis, $dim(U) = \sum\limits_{j=1}^{n} j = \binom{n+1}{2}$

10.5

$\mathbb{R}^4 :\ (1,2,-1,3),\ (3,4,0,1)$

1. Mögl. $(1,0,0,0),\ (0,1,0,0) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\Rightarrow W =< v_1, v2 >= \mathbb{R}v_3 + \mathbb{R}v_4$ bildet einen direkten Summanden mit U.

2. Mögl. $(0,0,1,0),\ (0,0,0,1) \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

$\Rightarrow (v_1, v_2, v_5, v_6)$ ist Basis von $\mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathbb{R}v_5 + \mathbb{R}v_6 = V$ ist direkter Summand zu U.

10.6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 = dim(Bild(\hat{A}))$$

$\varphi : x \to y \Rightarrow \frac{x}{Kern(\varphi)} \tilde{=} Bild(\varphi)$

$dim(\mathbb{R}^4) - dim(Ker(\hat{A})) = dim(Bild(\hat{A})) = 2 \Rightarrow dim(Ker(\hat{A})) = 2$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{b_1, b_2\} \text{ ist Basis von } Kern(\hat{A})$$