

1 Hausaufgabenbesprechung 7.11.12

1.1 Aufgabe

$$(A^{(0)}|b^{(0)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & 11 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ -5 & -2 & -3 & -18 \end{array} \right)$$

$$(\tilde{A}^{(0)}|\tilde{b}^{(0)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & -3 & -18 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 11 \end{array} \right)$$

$$-l_{2,1} = \frac{3}{5}, \quad -l_{3,1} = \frac{1}{5}$$

$$(A^{(1)}|b^{(1)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & -3 & -18 \\ 0 & 2,2 & 1,8 & 9,8 \\ 0 & 3,4 & 2,6 & 14,6 \end{array} \right)$$

$$(\tilde{A}^{(1)}|\tilde{b}^{(1)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & -3 & -18 \\ 0 & 3,4 & 2,6 & 14,6 \\ 0 & 2,2 & 1,8 & 9,8 \end{array} \right)$$

$$(A^{(2)}|b^{(2)}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -2 & -3 & -18 \\ 0 & 3,4 & 2,6 & 14,6 \\ 0 & 0 & \frac{2}{17} & \frac{6}{17} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{\frac{6}{17}}{\frac{2}{17}} = 3$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{14,6 - 2 \cdot 3}{3,4} = 2$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-18 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3}{-5} = 1$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2(11) - 3(10) \neq 0$$

1.2 Aufgabe

1. natürliche Matrixnorm $\|\cdot\|$ ist Norm!

a) positiv definit: $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} \setminus \{0\}; \exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so dass

$$Ax \neq 0 \Leftrightarrow \|Ax\| \neq 0 \quad (\text{klar: } \|x\| \neq 0)$$

1. Fall $A > 0 \Rightarrow \|A\| = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\}$

2. Fall $A = 0 \Rightarrow Ax = 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \|Ax\| = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \|A\| = 0$

b) Homogenität:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass

$$\|\alpha A\| = \sup \left\{ \left\| \frac{(\alpha A)x}{\|x\|} \right\| \right\} = \sup \left\{ \frac{|\alpha| \|Ax\|}{\|x\|} \right\} = |\alpha| \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right\} = |\alpha| \|A\|$$

c) Dreiecksungleichung:

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup \left\{ \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \right\} = \sup \left\{ \frac{\|Ax+Bx\|}{\|x\|} \right\} \leq \sup \left\{ \frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|} \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \right\} = \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right\} + \sup \left\{ \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \right\} = \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

⇒ n-Matrixnorm ist Norm!

2. n.M. submultiplikativ:

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \|A \cdot B\| &= \sup \left\{ \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \right\} = \sup_{Bx \neq 0} \left\{ \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \frac{\|Bx\|}{\|Bx\|} \right\} \\ &= \sup_{Bx \neq 0} \left\{ \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \right\} = \sup_{Bx \neq 0} \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \right\} = \sup_{Bx \neq 0} \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right\} \sup_{Bx \neq 0} \left\{ \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \right\} = \|A\| \|B\| \end{aligned}$$

3. Warum $\|A\|_F \not\leq$ n.M.?

Es sei $A = E_n$ die n dim Einheitsmatrix $n \in \{1\}$

$$\Rightarrow \|A\|_F = \left(\sum_{j,k=1}^n \|a_{jk}\|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j,k=1}^n 1 \right)^{1/2} = \sqrt{n}$$

Aber für jede Vektornorm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| &= \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1 \neq \sqrt{n} \forall n > 1 \\ \Rightarrow \|A\|_F &\text{ keine n.M.} \end{aligned}$$

1.3 Aufgabe

a) Berechne Operationen f.d. Schritt $A^{(0)} \rightarrow A^{(1)}$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} \\ \vdots & & & \\ & a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow &\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & & \\ & & 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} = A^{(1)} \end{aligned}$$

mit

$$a_{2i}^{(1)} = a_{21}^{(0)} - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} a_{1i}^{(0)}$$

usw.

Operationen: (n-1) Divisionen und (n-1)(n-1) Multiplikationen.

Außerdem kommen für $b^{(0)} \rightarrow b^{(1)}$ noch dazu:

$$b_2^1 = b_2^0 - \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} b_1^0$$

etc.

Insgesamt im 1. Schritt: $2(n-1)$ Divisionen $+(n-1)^2$ Multiplikationen.

Analog im i-ten Schritt: $2(n-i)$ Divisionen $+(n-i)^2$ Multiplikationen.

Damit also insgesamt für die Umformung $A^{(0)} \rightarrow A^{(n-1)}$ und $b^0 \rightarrow b^{n-1}$:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-1} (2(n-i) + (n-i)^2) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 \\ &= 2 \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = 2 \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n \end{aligned}$$

Berechne x durch $Rx=c$:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \dots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \dots & a_{2n}^{(n-1)} \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \dots a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b_1^{n-1}$$

\vdots
 b_n^{n-1}

Operationen:

1 Div: x_n

1 Div und 1 Mult: x_{n-1}

1 Div und (n-1) Mult: x_1

insgesamt: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

für die Gaußelimination:

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5}{6}n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} = \frac{n^3}{3} + O(n^2)$$

b) Gauß-Algorithmus anwenden auf $[A|I] =: [A^{(0)}|I^{(0)}]$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Zunächst eliminiere A. Nach (a) benötigen wir im i-ten Schritt (n-i) Div und $(n-i)^2$ Mult.

Außerdem überführe $I^{(i-1)}$ nach $I^{(i)}$ durch $(n-i)$ Mult. in i Spalten.

Wir erhalten $[A^{(0)}|I^{(0)}] \rightarrow [A^{(n-1)}|I^{(n-1)}]$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)i = \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)}{2} + n \frac{n^2(n-1)}{2} = \frac{n^3}{2} - \frac{n}{2}$$

n mal Rücksubstitution f. d. Lösung $[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}]$

$$n \sum_{i=1}^{n-1} i = n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2}$$

$$\text{Insgesamt: } \left(\frac{n^3}{2} + \frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2}\right) = n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = n^3 + O(n^2)$$

1.4 Präsenzaufgabe

Cholesky-Zerlegung:

Für eine symmetrische, positiv definite Matrix A ex. eine Zerlegung in eine linke untere Dreiecksmatrix \tilde{L} mit

$$A = \tilde{L}\tilde{L}^T$$

Für die Lösung des LGS $Ax=b$ gilt $\tilde{L}\tilde{L}^T x = b \Leftrightarrow \tilde{L}y = b$ und $\tilde{L}^T x = y$

Betrachte die pos. def., symm Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gesucht ist } \begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & 0 & 0 \\ \tilde{l}_{21} & \tilde{l}_{22} & 0 \\ \tilde{l}_{31} & \tilde{l}_{32} & \tilde{l}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{l}_{11} & \tilde{l}_{12} & \tilde{l}_{13} \\ 0 & \tilde{l}_{22} & \tilde{l}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{l}_{33} \end{pmatrix} = A$$

Anschaulich:

$$\tilde{l}_{11}^2 = a_{11} = 2 \Rightarrow \tilde{l}_{11} = \sqrt{2}$$

Für die erste Spalte von A gilt nun:

$$\tilde{l}_{21}\tilde{l}_{11} = a_{21} = -1 \Rightarrow \tilde{l}_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{l}_{31}\tilde{l}_{11} = a_{31} = 3 \Rightarrow \tilde{l}_{31} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

2. Spalte:

$$\tilde{l}_{21}^2 + \tilde{l}_{22}^2 = a_{22} = 2 \Rightarrow \tilde{l}_{22} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\tilde{l}_{31}\tilde{l}_{21} + \tilde{l}_{32}\tilde{l}_{22} = a_{32} = -1 \Rightarrow \tilde{l}_{32} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

3. Spalte:

$$\tilde{l}_{31}^2 + \tilde{l}_{32}^2 + \tilde{l}_{33}^2 = a_{33} = 5 \Rightarrow \tilde{l}_{33} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\Rightarrow \tilde{L} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \sqrt{\frac{2}{5}} \end{pmatrix}$$

1.5 Tipp für Blatt 3

Im Falle allgemeiner regulärer Matrizen gilt mit $\|\cdot\|_2$:

$$\text{cond}_2(A) = \sqrt{\frac{\max|\lambda(A^*A)|}{\min|\lambda(A^*A)|}}$$

A^* : konj. Matrix zu A.

$\lambda(A^*A)$: Eigenwertspektrum von A^*A

Für $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ folgt:

$$\det(B^*B - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 6\lambda + 4$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3 + \sqrt{5} \text{ und } \lambda_2 = 3 - \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{cond}_2(B) = \sqrt{\frac{|3+\sqrt{5}|}{|3-\sqrt{5}|}} \approx 2,618$$